المجلة المصرية للسكان وتنظيم الأسرة
معهد الدراسات والبحوث الإحصائيه – جامعة القاهرة
المجلد ٤٥ – العدد يونيه ٢٠١٢

حساب توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة بجدول الحياة الحالى متعدد التناقص

د. مها محمد وجيه*

ملخص البحث

لدراسة تأثير خطر معين كان يهتم الباحثون بحساب توقع الحياة فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة بالإضافة لحساب توقع الحياة بعد حذف تأثير الخطر محل التحليل. ولعدم واقعية هذا الأسلوب يحاول البحث دراسة تأثير خطر معين من خلال حساب توقع الحياة المناظر لهذا السبب للوفاة فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة. ولقد بدأت الدراسة بتعريف توقع الحياة عند عمر معين بدلالة توقع العمر عند الوفاة بعد العمر محل التحليل، ولقد تم تعريف دالة كثافة احتمال العمر عند الوفاة للمفردة ذات عمر معين. ثم تم تعريف توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة عند عمر معين فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة بدلالة توقع العمر عند الوفاة للسبب محل التحليل بعد العمر محل التحليل، ولقد تم تعريف دالة كثافة احتمال العمر عند الوفاة لسبب معين للمفردة ذات عمر معين.

كما تم تعريف صيغ تقريبية لتوقع العمر عند الوفاة ولتوقع العمر عند الوفاة لسبب معين نعتمد على تجزئة العمر إلى الفئات العمرية التى يتضمنها عمود العمر بجدول الحياة وافتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية.

ولقد تم تطبيق الصيغ التقريبية لتوقع العمر عند الوفاة وتوقع العمر عند الوفاة لسبب معين على المثال الذى قدمه مجلس السكان الدولى عام ٢٠١٠، عن جدول الحياة الحالى متعدد التناقص. ولقد تطابقت النتائج؛ فتوقع الحياة المحسوب بالبحث تطابق مع توقع الحياة المحسوب بالمثال المشار إليه بالرغم من اختلاف الأسلوب المطبق لحساب توقع الحياة فى الحالتين. كما تم الحصول على توقع الحياة المناظر لكل سبب من أسباب الوفاة الثلاثة محل الدراسة فى ظل تأثير المخاطر الثلاثة للوفاة.

هدف البحث

يهتم البحث بقياس تأثير خطر معين فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة، وذلك من خلال اتباع أسلوب مختلف عن أسلوب جدول الحياة فى تعريف توقع الحياة، بحيث يتم استخدام هذا الأسلوب فى تعريف توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة.

وسوف نبدأ بتعريف توقع الحياة عند عمر معين بدلالة توقع العمر عند الوفاة، وسوف يتم الحصول على دالة كثافة احتمال العمر عند الوفاة وتوقعه. ثم سيتم تعريف توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة عند عمر معين بدلالة توقع العمر عند الوفاة للسبب محل الدراسة، وسوف يتم الحصول على دالة كثافة احتمال العمر عند الوفاة للسبب محل الدراسة وتوقعه. وسوف نستخدم صيغ تقريبية لتوقع العمر عند الوفاة وتوقع العمر عند

---

* أستاذ بقسم الإحصاء – كلية الاقتصاد والعلوم السياسية

الوفاة لسبب معين تعتمد على تجزئة العمر إلى الفئات العمرية التى يتضمنها عمود العمر بجدول الحياة وافتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية.

١- مقدمة

يعرف توقع الحياة عند عمر[6] معين خلال فترة زمنية معينة بأنه متوسط عدد سنوات الحياة التى يتوقع أن يعيشها الشخص بعد هذا العمر عندما تسود معدلات الوفيات العمرية السنوية المشاهدة خلال الفترة الزمنية محل الدراسة فى المستقبل.

ويحسب توقع الحياة باستخدام جدول الحياة الحالى أو الفوجى[٧,6,4,1]. فيعرف توقع الحياة عند عمر معين بدلالة تكامل دالة البقاء على قيد الحياة بين العمر محل التحليل وبين ∞، حيث يتم تقريب دالة البقاء على قيد الحياة باستخدام صيغة خطية أو صيغة أسية بكل فئة عمرية بجدول الحياة. وقد اهتم Adamic (2008) بحساب توقع الحياة بجدول الحياة الفوجى فى حالة وجود خروج عن الملاحظة من جهة اليمين ومن جهة اليسار وفى ظل احتجاب سبب الوفاة عن بعض المفردات محل التحليل.

ولقد عامل Silcocks et al (2001) توقع الحياة كمقياس مباشر وملائم للتقدم؛ فالهدف دائماً زيادة متوسط عدد سنوات الحياة لمفردات المجتمع، وفضلوا استخدامه كمقياس للمقارنة بين المستوى الصحى فى عدد من المجتمعات عن استخدام معدلات الوفيات المعايرة المباشرة وغير المباشرة لما له من معنى واضح ومفهوم للمتخصصين والعامة. كما عامل Silcocks et al (2001) توقع الحياة كمتغير له توزيعه الاحتمالى وله تباينه على أساس أنه يختلف خلال الزمن من سنة لأخرى لاختلاف عدد الوفيات بمختلف الفئات العمرية من سنة لأخرى.

ولقد اعتبر Conti et al (1999) أن توقع الحياة يلخص ظاهرة الوفاة فى مجتمع معين، وأشاروا إلى أنه مقياس للحالة الصحية يستخدم فى وضع الاستراتيجيات الصحية فى المجتمع.

وعندما تتعدد المخاطر محل الدراسة، لدراسة تأثير خطر معين[4,3,2,1] يتم حساب توقع الحياة وتوقع الحياة بعد حذف تأثير هذا الخطر، ثم يتم حساب الزيادة فى توقع الحياة المناظرة لهذا الحذف وذلك بعد التمييز بين مجموعتين من المخاطر؛ الخطر المطلوب دراسة تأثيره وباقى المخاطر محل الدراسة.

ويعتبر افتراض حذف خطر معين افتراض غير واقعى، ولذلك لجأ Conti et al (1999) للحذف الجزئى للخطر محل الدراسة، ولقد اهتموا بحساب توقع الحياة خلال سن العمل، فالإضافات فى توقع الحياة خلال سن العمل المناظرة لحذف خطر معين تقيس التكلفة

الاقتصادية لهذا الخطر. ولقد لجأ Conti et al (1999) لاستخدام جدول الحياة المتعدد الجزئى لحذف تأثير الخطر محل الدراسة.

ولقد اهتم Carey (1989) بتطبيق جدول الحياة المتعدد فى مجال علم الـ ecology؛ علم علاقة الكائنات الحية بالبيئة، كما اهتم بتعريف احتمال الوفاة لسبب معين باعتباره السبب الوحيد الذى يؤدى لتناقص مفردات المجتمع وذلك كوسيلة لحساب توقع الحياة بعد حذف تأثير الخطر محل الدراسة فى ظل وجود مجموعتين من المخاطر.

أيضاً اهتم Adamic (2008) بتعريف دالة البقاء على قيد الحياة فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة، وتعريف دالة البقاء على قيد الحياة فى ظل تأثير مجموعة المخاطر محل الدراسة ماعدا الخطر محلل التحليل، ومنها تم حساب توقع الحياة وتوقع الحياة بعد حذف تأثير الخطر محل التحليل والإضافات فى توقع الحياة نتيجة للحذف.

كما اهتم Dietz & Heesterbeek (2002) فى ضوء نموذج برنوللى عام 1766 بحساب توقع الحياة بعد حذف تأثير خطر معين بدلالة توقع الحياة تحت تأثير جميع المخاطر محل الدراسة، ولقد تمت إعادة تعريف الصيغ الرياضية بدلالة بعض المقاييس التى يمكن حسابها فى ضوء ما هو متوفر من بيانات.

لقد كان هناك اهتمام بالبحث عن قيمة الزيادة فى توقع الحياة عند حذف تأثير الخطر محل الدراسة، ولم يكن هناك أى تفكير لحساب توقع الحياة المناظر للخطر محل التحليل فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة. فكما يتم حساب احتمال الوفاة لسبب معين فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة سوف نهتم بحساب توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة.

وبالتالى يمكن أن نميز بين توقع الحياة عند عمر معين وتوقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة عند عمر معين. فتوقع الحياة عند عمر معين هو توقع الحياة الذى يأخذ فى الاعتبار جميع أسباب الوفاة. أما توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة عند عمر معين فهو توقع الحياة للشخص المصاب بمرض معين بعد العمر محل التحليل فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة، ويعرف خلال فترة زمنية معينة بأنه متوسط عدد سنوات الحياة للشخص المصاب بعد العمر محل التحليل عندما تسود معدلات الوفيات العمرية السنوية للأسباب المختلفة للوفاة المشاهدة خلال الفترة الزمنية محل الدراسة فى المستقبل.

وسوف نهتم بتعريف توقع الحياة للشخص المصاب بمرض معين بعد عمر معين فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة بجدول الحياة الحالى متعدد التناقص، وذلك من خلال تعريف

المتغير العمر عند الوفاة للسبب محل التحليل بعد العمر محل التحليل وتعريف دالة كثافة احتماله وتوقعه.

ولقد تم اشتقاق الأسلوب المتبع فى ضوء الإطار العام للمفهوم الذى قدمه Kundu et al (1992). فقد اهتم هؤلاء الباحثون بتعريف المتغيرات: مدة البقاء على قيد الحياة للوفيات بسبب السرطان ومدة البقاء على قيد الحياة للوفيات لأى سبب آخر وزمن الخروج عن الملاحظة، وافترضوا أن كل متغير يتبع التوزيع الأسى، ثم اهتموا بتقدير معلمات هذه التوزيعات الأسية والحصول على فترات ثقة لتوقع مدة البقاء على قيد الحياة؛ الذى هو مقلوب معلمة التوزيع الأسى.

وسوف يتم تعريف توقع الحياة عند عمر معين بدلالة توقع العمر عند الوفاة بعد العمر محل التحليل، وتعريف توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة عند عمر معين بدلالة توقع العمر عند الوفاة للسبب محل التحليل بعد العمر محل التحليل. ثم سيتم الحصول على صيغ تقريبية لتوقع العمر عند الوفاة بعد عمر معين وتوقع العمر عند الوفاة لسبب معين بعد عمر معين لحساب توقع الحياة عند عمر معين وحساب توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة عند عمر معين فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة. وسوف يتم التطبيق على المثال عن جدول الحياة الحالى متعدد التناقص الذى قدمه مجلس السكان الدولى عام ٢٠١٠.

ومما هو جدير بالإشارة إليه أنه لم يتعرض الباحثون لحساب توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة.

٢- إعادة تعريف توقع الحياة عند عمر معين

إذا كان المتغير x يمثل العمر عند الوفاة للمفردة ذات العمر a_J ؛ $J = 0,1,2 \dots w$ ، يمكن تعريف دالة كثافة احتمال المتغير x وتوقعه، ويمكن تعريف توقع مدة البقاء على قيد الحياة بعد العمر a_J فى ضوء توقع x كالآتى:

٢/١- تعريف دالة كثافة احتمال العمر عند الوفاة للمفردة ذات العمر a_J ؛ $J = 0,1,2 \dots w$

٢/١/١- عندما $J = 0$ ، $a_0 = 0$

$$f_0(x) = e^{-\int_0^x u(t)dt}\, u(x)^{(1)} \quad , \quad x > 0 \qquad (1)$$

$u(t)$ تعبر عن خطر الوفاة عند العمر t

وتتحقق العلاقة

$$\int_0^{\infty} e^{-\int_0^x u(t)dt}\, u(x)dx = 1$$

٢/١/٢- عندما $J = 1,2 \ldots w$ ، $a_J > 0$

$$f_J(x) = e^{-\int_{a_J}^x u(t)dt}\, u(x) \qquad x > a_J \qquad (2)$$

حيث تتحقق العلاقة

$$\int_{a_J}^{\infty} e^{-\int_{a_J}^x u(t)dt}\, u(x)dx = 1$$

وتسمى دوال كثافات الاحتمال $f_J(x)$ ؛ $J = 1,2 \ldots w$ بالـ truncated distributions. التوزيعات الاحتمالية المبتورة[٢].

٢/٢- تعريف توقع العمر عند الوفاة للمفردة ذات العمر a_J ؛ $J = 0,1,2 \ldots w$

$$E_{a_J}(x) = \int_{a_J}^{\infty} x\, f_J(x)dx \qquad x > a_J \ , \forall J$$

$$E_{a_J}(x) = \int_{a_J}^{\infty} x\, e^{-\int_{a_J}^x u(t)dt}\, u(x)dx \qquad (3)$$

٢/٣- تعريف توقع مدة البقاء على قيد الحياة للمفردة ذات العمر a_J بعد العمر a_J ؛ $J = 0,1,2 \ldots w$

إذا كان y = مدة البقاء على قيد الحياة بعد العمر a_J للمفردة ذات العمر a_J فإن

$y = x - a_J$

[١] يتطابق مفهوم دالة كثافة احتمال العمر عند الوفاة مع مفهوم دالة كثافة احتمال مدة البقاء على قيد الحياة التى عرفها Adamic (2008) عند تعريف توقع الحياة

[٢] لأن قيم المتغير المتصل x لا تبدأ من الصفر

$$e(a_J) = E_{a_J}(y) = E_{a_J}(x) - a_J \qquad (4)$$

$e(a_J) =$ توقع الحياة عند العمر a_J ، $J = 0,1,2\ldots w$

٣- تعريف توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة عند عمر معين فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة

إذا أخذنا فى الاعتبار أن x_k تمثل العمر عند الوفاة لسبب معين k؛ $k = 1,2\ldots c$، للمفردة ذات العمر a_J؛ $J = 0,1,2\ldots w$، يمكن تعريف دالة كثافة احتمال x_k وتوقعه، ويمكن تعريف توقع مدة البقاء على قيد الحياة المناظرة للسبب k للوفاة بعد العمر a_J فى ضوء توقع x_k كالآتى:

٣/١- تعريف دالة كثافة احتمال العمر عند الوفاة لسبب معين k؛ $k = 1,2\ldots c$، للمفردة ذات العمر a_J؛ $J = 0,1,2\ldots w$

٣/١/١- عندما $J = 0$ ، $a_0 = 0$

$$f_0(x_k) = \frac{e^{-\int_0^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)}{\int_0^{\infty} e^{-\int_0^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)\,dx_k} \qquad x_k > 0\ ,\ \forall\, k \qquad (5)$$

$u^k(t)$ تعبر عن خطر الوفاة للسبب k عند العمر t

وتتحقق العلاقة $u^1(t) + u^2(t) + \cdots + u^c(t) = u(t)\ ,\ 0 < t < x_k$

٣/١/٢- عندما $J = 1,2\ldots w$ ، $a_J > 0$

$$f_J(x_k) = \frac{e^{-\int_{a_J}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)}{\int_{a_J}^{\infty} e^{-\int_{a_J}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)\,dx_k} \qquad x_k > a_J\ ,\ \forall\, k,J \qquad (6)$$

وتسمى هذه التوزيعات الاحتمالية بالتوزيعات الاحتمالية المبتورة.

٣/٢- تعريف توقع العمر عند الوفاة لسبب معين k؛ $k = 1,2\ldots c$، للمفردة ذات العمر a_J؛ $J = 0,1,2\ldots w$

$$E_{a_J}(x_k) = \int_{a_J}^{\infty} x_k\, f_J(x_k)\, dx_k \qquad x_k > a_J\ ,\ \forall\ k, J$$

$$E_{a_J}(x_k) = \frac{\int_{a_J}^{\infty} x_k\, e^{-\int_{a_J}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)\, dx_k}{\int_{a_J}^{\infty} e^{-\int_{a_J}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)\, dx_k} \tag{7}$$

٣/٣– تعريف توقع مدة البقاء على قيد الحياة المناظرة لسبب معين للوفاة k للمفردة ذات العمر a_J بعد العمر a_J؛ $k = 1,2...c$، $J = 0,1,2...w$

إذا كان y_k = مدة البقاء على قيد الحياة المناظرة لسبب معين للوفاة k بعد العمر a_J للمفردة ذات العمر a_J

فإن

$$y_k = x_k - a_J$$

$$e^k(a_J) = E_{a_J}(y_k) = E_{a_J}(x_k) - a_J \tag{8}$$

$e^k(a_J) =$ توقع الحياة المناظر لسبب الوفاة k عند العمر a_J؛ $k = 1,2...c$، $J = 0,1,2...w$، فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة

٤– حساب توقع الحياة عند عمر معين

سوف نهتم بالحصول على صيغ تقريبية للتكاملات التالية:

٤/١– الحصول على صيغة تقريبية لتوقع العمر عند الوفاة للمفردة ذات العمر صفر

إذا أخذنا فى الاعتبار أن $a_0 = 0$، a_1، a_2، ... a_w تمثل الحد الأدنى للفئات العمرية المتتالية بعمود العمر بجدول الحياة، فإن

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-\int_0^x u(t)dt}\, u(x)dx = \int_0^{a_1} x\, e^{-\int_0^x u(t)dt}\, u(x)dx +$$

$$e^{-\int_0^{a_1} u(t)dt} \int_{a_1}^{a_2} x\, e^{-\int_{a_1}^x u(t)dt}\, u(x)dx + e^{-\int_0^{a_1} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2} u(t)dt} \int_{a_2}^{a_3} x\, e^{-\int_{a_2}^x u(t)dt}\, u(x)dx$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ e^{-\int_0^{a_1} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2} u(t)dt} \cdots\cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t)dt} \int_{a_i}^{a_{i+1}} x\, e^{-\int_{a_i}^x u(t)dt}\, u(x)dx + \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$+e^{-\int_{0}^{a_1}u(t)dt}\cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2}u(t)dt}\ldots\ldots e^{-\int_{a_{w-1}}^{a_w}u(t)dt}\int_{a_w}^{a_w+h_w}x\, e^{-\int_{a_w}^{x}u(t)dt}\,u(x)dx. \qquad (9)$$

فيعرف احتمال البقاء على قيد الحياة بالفئة العمرية (a_{i-1},a_i) بشرط البقاء على قيد الحياة حتى العمر a_{i-1} كالآتى:

$${}_{h_{i-1}}P_{a_{i-1}}=e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i}u(t)dt}=e^{-(a_i-a_{i-1})\,{}_{h_{i-1}}m_{a_{i-1}}}=e^{-h_{i-1}\,{}_{h_{i-1}}m_{a_{i-1}}} \qquad (10)$$

فى ظل تطبيق نظرية القيمة المتوسطة بالفئة العمرية (a_{i-1},a_i)

حيث $h_{i-1}=$ طول الفئة العمرية $(a_{i-1},a_i)=a_i-a_{i-1}$

${}_{h_{i-1}}m_{a_{i-1}}=$ معدل الوفاة بالفئة العمرية (a_{i-1},a_i)

$h_w=$ طول الفئة العمرية $+\ a_w$

وبالتالى يعرف حاصل الضرب لاحتمالات البقاء على قيد الحياة بالفئات العمرية المتتالية كالآتى:

$$e^{-\int_{a_0}^{a_1}u(t)dt}\cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2}u(t)dt}\ldots\ldots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i}u(t)dt}={}_{h_0}P_{a_0}\cdot{}_{h_1}P_{a_1}\cdot{}_{h_2}P_{a_2}\ldots\ldots{}_{h_{i-1}}P_{a_{i-1}}={}_{a_0}S_{a_i}$$

احتمال البقاء على قيد الحياة من العمر a_0 إلى العمر a_i بشرط البقاء على قيد $={}_{a_0}S_{a_i}$ الحياة حتى العمر a_0

(11)

أما التكامل $\int_{a_i}^{a_{i+1}}x\, e^{-\int_{a_i}^{x}u(t)dt}\,u(x)dx$ فيمكن حسابه باستخدام أسلوب التكامل بالتجزيء وافتراض ثبات خطر الوفاة بكل فئة عمرية كالآتى:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}}x\, e^{-\int_{a_i}^{x}u(t)dt}\,u(x)dx=\left(-x\, e^{-\int_{a_i}^{x}u(t)dt}\right)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}}+\int_{a_i}^{a_{i+1}}e^{-\int_{a_i}^{x}u(t)dt}dx$$

$$=(a_i-a_{i+1}\, e^{-h_i\,{}_{h_i}m_{a_i}})+\frac{1}{{}_{h_i}m_{a_i}}\left(-e^{-(x-a_i)\,{}_{h_i}m_{a_i}}\right)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}}$$

$$=(a_i-a_{i+1}\, e^{-h_i\,{}_{h_i}m_{a_i}})+\frac{1}{{}_{h_i}m_{a_i}}(1-e^{-h_i\,{}_{h_i}m_{a_i}})$$

$$=(a_i-a_{i+1}\,{}_{h_i}P_{a_i})+\frac{1}{{}_{h_i}m_{a_i}}(1-{}_{h_i}P_{a_i}) \qquad (12)$$

٤/٢- الحصول على صيغة تقريبية لتوقع العمر عند الوفاة للمفردة ذات العمر a_j؛ $.J=1,2\ldots w$

إذا أخذنا فى الاعتبار الحد الأدنى للفئات العمرية التى يتضمنها عمود العمر بجدول الحياة فإن

$$\int_{a_J}^{\infty} x\, e^{-\int_{a_J}^{x} u(t)dt}\, u(x)dx = \int_{a_J}^{a_{J+1}} x\, e^{-\int_{a_J}^{x} u(t)dt}\, u(x)dx$$
$$+ e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}} u(t)dt} \int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}} x\, e^{-\int_{a_{J+1}}^{x} u(t)dt}\, u(x)dx + \cdots\cdots + \cdots$$
$$+ e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}} u(t)dt} \cdots\cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t)dt} \int_{a_i}^{a_{i+1}} x\, e^{-\int_{a_i}^{x} u(t)dt}\, u(x)dx$$
$$+ \cdots + e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}} u(t)dt} \cdots\cdots e^{-\int_{a_{w-1}}^{a_w} u(t)dt} \int_{a_w}^{a_w+h_w} x\, e^{-\int_{a_w}^{x} u(t)dt}\, u(x)dx. \qquad (13)$$

حيث يعرف حاصل الضرب

$$e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}} u(t)dt} \cdots\cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t)dt}$$

كالآتى:

احتمال البقاء على قيد الحياة من العمر a_J إلى العمر a_i بشرط البقاء $= {}_{a_J}S_{a_i} = \dfrac{{}_{a_0}S_{a_i}}{{}_{a_0}S_{a_J}}$

على قيد الحياة حتى العمر a_J

(14)

ويعرف التكامل $\int_{a_i}^{a_{i+1}} x\, e^{-\int_{a_i}^{x} u(t)dt}\, u(x)dx$

بنفس الأسلوب السابق الإشارة إليه عند حساب توقع العمر عند الوفاة للمفردة ذات العمر صفر، العلاقة (12).

٥- حساب توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة عند عمر معين فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة

يمكن الحصول على صيغ تقريبية لتوقع العمر عند الوفاة لسبب معين k للمفردة ذات العمر a_J ؛ $k = 1,2...c$ ، $J = 0,1,2...w$ ، كالآتى:

٥/١- الحصول على صيغة تقريبية لتوقع العمر عند الوفاة لسبب معين k للمفردة ذات العمر صفر؛ $k = 1,2...c$

$$E_0(x_k)=\frac{\int_0^\infty x_k\, e^{-\int_0^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k}{\int_0^\infty e^{-\int_0^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k} \qquad x_k>0\,,\forall k \qquad (15)$$

فبالنسبة للمقام يمكن حسابه بطريقة تقريبية، إذا أخذنا فى الاعتبار أن $a_0=0$ ، a_1 ، a_2 ،... a_w تمثل الحد الأدنى للفئات العمرية التى يتضمنها عمود العمر بجدول الحياة، كالآتى:

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k =$$

$$\int_0^{a_1} e^{-\int_0^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k + e^{-\int_0^{a_1}u(t)dt}\int_{a_1}^{a_2} e^{-\int_{a_1}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k$$

$$+e^{-\int_0^{a_1}u(t)dt}\cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2}u(t)dt}\int_{a_2}^{a_3} e^{-\int_{a_2}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k+\cdots\cdots$$

$$+e^{-\int_0^{a_1}u(t)dt}\cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2}u(t)dt}\cdots\cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i}u(t)dt}\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-\int_{a_i}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k+\cdots\cdots$$

$$+e^{-\int_0^{a_1}u(t)dt}\cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2}u(t)dt}\cdots\cdots e^{-\int_{a_{w-1}}^{a_w}u(t)dt}\int_{a_w}^{a_w+h_w} e^{-\int_{a_w}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k. \qquad (16)$$

حيث يحسب التكامل $\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-\int_{a_i}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k$ كالآتى:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-\int_{a_i}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k=\frac{u^k(a_i)}{u(a_i)}\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-\int_{a_i}^{x_k}u(t)dt}\, u(x_k)dx_k$$

$$=\frac{{}_{h_i}m^k_{a_i}}{{}_{h_i}m_{a_i}}\left(e^{-(x_k-a_i)\,{}_{h_i}m_{a_i}}\right)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}}$$

$$=\frac{{}_{h_i}m^k_{a_i}}{{}_{h_i}m_{a_i}}\left(1-e^{-h_i\,{}_{h_i}m_{a_i}}\right)=\frac{{}_{h_i}m^k_{a_i}}{{}_{h_i}m_{a_i}}\left(1-{}_{h_i}P_{a_i}\right) \qquad (17)$$

وذلك فى ظل افتراض ثبات مخاطر الوفاة بكل فئة عمرية، حيث يعرف ${}_{h_i}m^k_{a_i}$ كالآتى:

${}_{h_i}m^k_{a_i}=$ معدل الوفاة للسبب k بالفئة العمرية (a_i, a_{i+1}) ؛ $k=1,2\ldots c$

ويمكن إعادة تعريف حاصل الضرب $e^{-\int_0^{a_1} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2} u(t)dt} \cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t)dt}$ بدلالة $_{a_0}S_{a_i}$ كما سبق وأشرنا فى ضوء العلاقة (11).

وبالنسبة للبسط يمكن الحصول على صيغة تقريبية له، إذا أخذنا فى الاعتبار الحد الأدنى للفئات العمرية المتتالية بعمود العمر بجدول الحياة، كالآتى:

$$\int_0^{\infty} x_k\, e^{-\int_0^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k = \int_0^{a_1} x_k\, e^{-\int_0^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k$$

$$+ e^{-\int_0^{a_1} u(t)dt} \int_{a_1}^{a_2} x_k\, e^{-\int_{a_1}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k + \cdots\cdots +$$

$$e^{-\int_0^{a_1} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2} u(t)dt} \cdots\cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t)dt} \int_{a_i}^{a_{i+1}} x_k\, e^{-\int_{a_i}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k + \cdots$$

$$\cdots + e^{-\int_0^{a_1} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2} u(t)dt} \cdots\cdots e^{-\int_{a_{w-1}}^{a_w} u(t)dt} \int_{a_w}^{a_w+h_w} x_k\, e^{-\int_{a_w}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k. \qquad (18)$$

حيث يحسب التكامل $\int_{a_i}^{a_{i+1}} x_k\, e^{-\int_{a_i}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k$ كالآتى:

ففى ظل افتراض ثبات مخاطر الوفاة بكل فئة عمرية

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} x_k\, e^{-\int_{a_i}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k = \frac{u^k(a_i)}{u(a_i)} \int_{a_i}^{a_{i+1}} x_k\, e^{-\int_{a_i}^{x_k} u(t)dt}\, u(x_k)dx_k$$

$$= \frac{{}_{h_i}m^k_{a_i}}{{}_{h_i}m_{a_i}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} x_k\, e^{-\int_{a_i}^{x_k} u(t)dt}\, u(x_k)dx_k \qquad (19)$$

ويمكن حساب هذه الصيغة الرياضية فى ضوء العلاقة (12) السابق الإشارة إليها.

وحاصل الضرب $e^{-\int_0^{a_1} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_1}^{a_2} u(t)dt} \cdots\cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t)dt}$ ، يمكن حسابه فى ضوء العلاقة (11) بدلالة $_{a_0}S_{a_i}$.

٥/٢- الحصول على صيغة تقريبية لتوقع العمر عند الوفاة لسبب معين k؛ $k=1,2\ldots c$، للمفردة ذات العمر a_J؛ $J=1,2\ldots w$، $a_J>0$

$$E_{a_J}(x_k)=\frac{\int_{a_J}^{\infty} x_k\, e^{-\int_{a_J}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k}{\int_{a_J}^{\infty} e^{-\int_{a_J}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k} \quad x>a_J\ ,\ \forall k,J \qquad (20)$$

فبالنسبة للمقام يمكن الحصول على صيغة تقريبية له بدلالة الحد الأدنى للفئات العمرية المتتالية بعمود العمر بجدول الحياة كالآتى:

$$\int_{a_J}^{\infty} e^{-\int_{a_J}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k = \int_{a_J}^{a_{J+1}} e^{-\int_{a_J}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k$$
$$+e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}}u(t)dt}\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}} e^{-\int_{a_{J+1}}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k+\cdots\cdots\cdots$$
$$+e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}}u(t)dt}\cdot e^{-\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}}u(t)dt}\cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i}u(t)dt}\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-\int_{a_i}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k+\cdots\cdots$$
$$+e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}}u(t)dt}\cdot e^{-\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}}u(t)dt}\cdots e^{-\int_{a_{w-1}}^{a_w}u(t)dt}\int_{a_w}^{a_w+h_w} e^{-\int_{a_w}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k. \qquad (21)$$

فيعرف حاصل الضرب $e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}}u(t)dt}\cdot e^{-\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}}u(t)dt}\cdots\cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i}u(t)dt}$ بدلالة العلاقة (14).

ويعرف التكامل $\int_{a_J}^{a_{i+1}} e^{-\int_{a_i}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k$ ، بدلالة العلاقة (17) وذلك فى ظل افتراض ثبات مخاطر الوفاة بكل فئة عمرية.

وبالنسبة للبسط يمكن الحصول على صيغة تقريبية له بدلالة الحد الأدنى للفئات العمرية المتتالية بعمود العمر بجدول الحياة كالآتى:

$$\int_{a_J}^{\infty} x_k\, e^{-\int_{a_J}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k = \int_{a_J}^{a_{J+1}} x_k\, e^{-\int_{a_J}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k$$
$$+e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}}u(t)dt}\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}} x_k\, e^{-\int_{a_{J+1}}^{x_k}u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k+\cdots\cdots+\cdots\cdots$$

$$+e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}} u(t)dt} \cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t)dt} \int_{a_i}^{a_{i+1}} x_k\, e^{-\int_{a_i}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots$$

$$+e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}} u(t)dt} \cdots\cdots e^{-\int_{a_{w-1}}^{a_w} u(t)dt} \int_{a_w}^{a_w+h_w} x_k\, e^{-\int_{a_w}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k \qquad (22)$$

فيعرف التكامل $\int_{a_i}^{a_{i+1}} x_k\, e^{-\int_{a_i}^{x_k} u(t)dt}\, u^k(x_k)dx_k$ بدلالة العلاقة (19) والعلاقة (12)، ويعرف حاصل الضرب $e^{-\int_{a_J}^{a_{J+1}} u(t)dt} \cdot e^{-\int_{a_{J+1}}^{a_{J+2}} u(t)dt} \cdots\cdots e^{-\int_{a_{i-1}}^{a_i} u(t)dt}$ بدلالة العلاقة (14)، وذلك فى ظل افتراض ثبات مخاطر الوفاة بكل فئة عمرية.

٦- التطبيق

يتم حساب توقع الحياة $e(x)$، وتوقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة k؛ $k=1,2\ldots c$ ، $e^k(x_k)$، عند الحد الأدنى للفئات العمرية المتتالية التى يتضمنها عمود العمر بجدول الحياة الحالى[١] متعدد التناقص الذى قدمه مجلس السكان الدولى (٢٠١٠)؛ جدول (٦/١). ويتضمن جدول (٦/٢) توقع الحياة عند كل عمر بجدول الحياة المحسوب باستخدام الصيغ التقريبية المقترحة بالبحث، بالإضافة لتوقع الحياة عند كل عمر المحسوب من جدول الحياة الحالى محل التحليل، للوقوف على مدى دقة نتائج البحث ومدى دقة الصيغ التى تم استخدامها. ويتضمن جدول (٦/٣) توقعات الحياة المناظرة لكل سبب للوفاة عند كل عمر بجدول الحياة فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة.

---

[١] الفصل الثالث ص ٤٧

جدول (٦/١)

مدخلات جدول الحياة الحالى محل التحليل

a_i	${}_{h_i}m_{a_i}$	$\frac{{}_{h_i}m^1_{a_i}}{{}_{h_i}m_{a_i}}$	$\frac{{}_{h_i}m^2_{a_i}}{{}_{h_i}m_{a_i}}$	$\frac{{}_{h_i}m^3_{a_i}}{{}_{h_i}m_{a_i}}$
0	.0269	.0349	.0045	.9606
1	.0011	.2895	.0225	.0880
5	.0005	.4024	.0438	.5539
10	.0004	.4270	.0734	.4996
15	.0009	.5502	.0677	.3821
20	.0012	.5059	.0898	.4043
25	.0013	.3535	.1387	.5077
30	.0016	.2488	.2037	.5475
35	.0023	.1699	.2862	.5438
40	.0037	.1142	.3710	.5148
45	.0059	.0800	.4287	.4913
50	.0093	.0558	.4758	.4684
55	.0136	.0401	.5205	.4394
60	.0216	.0293	.5618	.4089
65	.0318	.0241	.5989	.3770
70	.0480	.0221	.6405	.3374
75+	.1100	.0267	.6339	.3394

المصدر: مجلس السكان الدولى (٢٠١٠) ص ٤٧

${}_{h_i}m_{a_i} =$ معدل الوفاة بالفئة العمرية (a_i, a_{i+1})، $h_i =$ طول الفئة العمرية (a_i, a_{i+1})

${}_{h_i}m^k_{a_i} =$ معدل الوفاة للسبب k بالفئة العمرية (a_i, a_{i+1})، $k = 1,2,3$

جدول (٦/٢)

توقع الحياة عند عمر معين

توقع الحياة عند العمر المناظر الناتج عن تطبيق البحث $e(a_J)$	توقع الحياة عند العمر المناظر فى ظل جدول الحياة الحالى[1] محل التحليل $e^*(a_J)$	a_J
70.7	69.9	0
71.7	70.7	1
68.0	67.0	5
63.1	62.2	10
57.7	57.3	15
52.9	52.6	20
48.0	47.9	25
43.3	43.2	30
38.6	38.5	35
33.9	33.9	40
29.5	29.5	45
25.3	25.3	50
21.4	21.4	55
17.8	17.8	60
14.5	14.5	65
11.6	11.6	70
9.1	9.1	75+

(١) المصدر – مجلس السكان الدولى (٢٠١٠)

فكما يتضح بجدول (٦/٢) يتطابق توقع الحياة المحسوب بالأسلوب المقترح بالبحث مع توقع الحياة المحسوب باستخدام جدول الحياة، مما يدل على دقة الصيغ التقريبية التى تم استخدامها لتوقع العمر عند الوفاة وتوقع العمر عند الوفاة لسبب معين.

جدول (٦/٣)

توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة عند عمر معين

فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة

a_J	$e^1(a_J)$	$e^2(a_J)$	$e^3(a_J)$	$e(a_J)$
0	61.5	74.7	66.2	70.7
1	61.8	73.7	69.8	71.7
5	59.4	69.7	66.3	68.0
10	55.7	64.7	61.5	63.1
15	46.8	59.7	56.0	57.7
20	42.8	54.7	51.1	52.9
25	38.7	49.7	46.3	48.0
30	36.0	44.8	41.6	43.3
35	32.9	39.9	37.1	38.6
40	29.5	35.1	32.6	33.9
45	26.5	30.4	28.3	29.5
50	23.6	26.0	24.4	25.3
55	20.8	21.9	20.7	21.4
60	17.7	18.0	17.3	17.8
65	14.8	14.6	14.3	14.5
70	11.7	11.6	11.6	11.6
75+	9.1	9.1	9.1	9.1

$e(a_J)$ = توقع الحياة عند العمر a_J

$e^k(a_J)$ = توقع الحياة المناظر للسبب k للوفاة عند العمر a_J، $k = 1,2,3$

وفى جدول (٦/٣) تم التحقق من دقة الحسابات باستخدام العلاقة:

$$\sum_{k=1}^{c} \int_{a_j}^{a_{j+1}} x_k \, e^{-\int_{a_j}^{x_k} u(t)dt} \, u^k(x_k)dx_k = \int_{a_j}^{a_{j+1}} x \, e^{-\int_{a_j}^{x} u(t)dt} \, u(x)dx$$

أيضاً فى جدول (٦/٣) يلاحظ أن توقع الحياة عند كل عمر عبارة عن قيمة تقع بين الحد الأدنى والأعلى لتوقعات الحياة المناظرة لسبب معين للوفاة عند العمر محل التحليل. كما يلاحظ أن السبب الأول للوفاة هو الأكثر خطراً من باقى أسباب الوفاة حتى العمر 50، وتزداد خطورة السبب الثالث للوفاة بنسبة طفيفة ابتداء من العمر 55.

٧- الخلاصة

لقد تم الحصول على توقع الحياة للمفردة ذات عمر معين a_J، $J = 0,1,2...w$ باستخدام توقع العمر عند الوفاة للمفردة ذات العمر a_J. فلقد تم تعريف دالة كثافة احتمال العمر عند الوفاة x بدلالة حاصل ضرب احتمال البقاء على قيد الحياة من العمر a_J إلى العمر x وخطر الوفاة عند العمر x. ولقد تم الحصول على صيغة تقريبية لتوقع x بعد تجزئة العمر إلى الفئات العمرية التى يتضمنها عمود العمر بجدول الحياة فى ظل افتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية، ومع إحلال خطر الوفاة(1) بمعدل الوفاة المناظر له بكل فئة عمرية. كذلك تم الحصول على توقع الحياة المناظر لسبب معين للوفاة k؛ $k = 1,2...c$ للمفردة ذات عمر معين a_J؛ $J = 0,1,2...w$، فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة باستخدام مفهوم توقع العمر عند الوفاة للسبب محل الدراسة k للمفردة ذات العمر a_J. ولقد تم تعريف دالة كثافة احتمال العمر عند الوفاة للسبب k؛ المتغير x_k، بدلالة حاصل ضرب احتمال البقاء على قيد الحياة خلال الفترة بين العمر a_J والعمر x_k وخطر الوفاة للسبب محل الدراسة عند العمر x_k، بحيث يراعى أن يكون مجموع قيم دالة كثافة الاحتمال لجميع قيم المتغير x_k مساوياً ١. ولقد تم الحصول على صيغة تقريبية لتوقع x_k بعد تجزئة العمر إلى الفئات العمرية التى يتضمنها عمود العمر بجدول الحياة فى ظل افتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية، ومع إحلال مخاطر الوفاة للأسباب المختلفة بمعدلات الوفيات للأسباب المختلفة المناظرة لها بكل فئة عمرية.

---

(1) علاقة يمكن إثبات صحتها

ولقد تم تطبيق الصيغ التقريبية لتوقع العمر عند الوفاة للمفردة ذات العمر a_J؛ $J = 0,1,2...w$، على جدول الحياة الحالى متعدد التناقص الذى قدمه مجلس السكان الدولى عام ٢٠١٠. ولقد ثبت تطابق النتائج بين توقع الحياة عند كل عمر المحسوب بالأسلوب المقترح بالبحث والمحسوب باستخدام دالة البقاء على قيد الحياة بجدول الحياة. ثم تم تطبيق الصيغ التقريبية لتوقع العمر عند الوفاة لسبب معين للمفردة ذات العمر a_J على نفس المثال السابق، مما يساعد على دراسة تأثير كل خطر على حدة فى ظل تأثير جميع المخاطر محل الدراسة بدلالة توقع الحياة المناظر للخطر محل التحليل. فلقد كانت الدراسات السابقة تهتم لتحديد تأثير خطر معين بالحصول على توقع الحياة وتوقع الحياة بعد حذف تأثير الخطر محل الدراسة بالرغم من عدم واقعية الأسلوب المتبع.

References

1- Adamic; P. 2008. "Cause – deleted life expectancy improvement for left and right censored data". Belgian Actuarial Bulletin, vol. 8, 17 – 21.
2- Carey; James R. 1989. "The multiple decrement life table: a unifying framework for cause-of-death analysis in ecology". Oecologia, vol. 78, 131-137.
3- Conti; S., Farchi; G., Masocco; M., Toccaceli; V., Vichi; M. 1999. " The impact of the major causes of death on life expectancy in Italy". International Journal of Epidemiology, vol. 28, 905-910.
4- Dietz; K., Heesterbeek; J. A. P. 2002. "Daniel Bernoulli's epidemiological model revisited". Mathematical Biosciences, vol. 180, 1-21.
5- Kundu; D., Kannan; N., Mazumdar; M. 1992. "Inference on risk rates based on mortality data under censoring and competing risks using parametric models". Biometrical Journal, vol. 34, 315-328.
6- Silcocks; P. B. S., Jenner; D. A., Reza; R. 2001. " Life expectancy as a summary of mortality in a population: statistical considerations and suitability for use by health authorities". J Epidemiol Community Health, vol. 55, 38-43.

المراجع العربية

٧- مجلس السكان الدولى – ٢٠١٠ – مقدمة فى علم السكان وتطبيقاته – دار النخيل للنشر والطباعة.