المجلة المصرية للسكان وتنظيم الأسرة
معهد الدراسات والبحوث الإحصائية – جامعة القاهرة
المجلد ٤٠ – العدد الأول ٢٠٠٧

بناء جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص في حالة توافر بيانات فوجية غير كاملة

د. مها محمد وجيه*

ملخص البحث

يهتم البحث بعلاج المشاكل التى يمكن أن تواجهنا عند بناء جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص فى حالة توافر بيانات فوجية غير كاملة، باستخدام نموذج يتضمن حالتين غير ماصتين وحالة ماصة واحدة. فيعنى ببناء جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة؛ بناء جدول الحياة المتناقص لها وبناء الجداول المرفقة به التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية. ويعتبر تعريف توقع الحياة وتوقع الحياة المعدل عند كل عمر خلال الفترة الزمنية المشاهدة أهم مشكلة تواجهنا عند بناء جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة. ففى ضوء تعريف Chiang (1968) لتوقع الحياة والفروض التى استخدمها فى حالة توافر بيانات فوجية غير كاملة، تم تعريف فروض البحث وتم اشتقاق صيغة عامة لتوقع الحياة وتوقع الحياة المعدل بجزئيه عند كل عمر خلال الفترة الزمنية المشاهدة. ثم باستخدام مثال بسيط تم تقدير توقع الحياة وتوقع الحياة المعدل للحالة متزوج فى نموذج يتضمن الحالة متزوج والحالة غير متزوج وحالة الوفاة. وتواجهنا مشكلة أخرى عندما تظهر مفردات مفقودات من الملاحظة بالبيانات التى يتم تحليلها، وذلك سواء عند بناء جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة أو عند بناء الجداول المرفقة به؛ فنحتاج لاستبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة من الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة أو تصف سلوك الملتحقات بها من الدرجات المتتالية. ولقد تم اشتقاق الاحتمالات التى تستبعد أثر خطر الفقدان من الملاحظة فى ضوء تعريف Chiang (1968) للاحتمالات الجزئية الخام. وأخيراً، تم تطبيق التعريف النظرى للاحتمال طبقاً لما قدمه وجيه (١٩٩٦)، لاشتقاق الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية يتعذر خلالها تطبيق أسلوب الإمكان الأكبر لتقدير مدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص.

أهداف البحث

يستهدف البحث بناء جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة، وذلك باستخدام نموذج يتضمن حالتين غير ماصتين وحالة ماصة واحدة. ولما كان يُقصد ببناء جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة بناء جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة وبناء الجداول المرفقة به التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية، فإن البحث يستهدف:

أ- تعريف الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة غير الماصة وتستبعد أثر خطر الفقدان من الملاحظة بكل فئة عمرية عندما تظهر مفردات مفقودات من الملاحظة بالبيانات محل التحليل.

---

* أستاذ مساعد بقسم الإحصاء ــ كلية الاقتصاد والعلوم السياسية

ب- تعـــريف توقع الحياة وتوقع الحياة المعدل عند كل عمر خلال الفترة الزمنية المشاهدة بجدول الحياة الذى يصف سلوك سكان الحالة غير الماصة محل الدراسة.

جـ- تعـــريف الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية وتستبعد أثر خطـــر الفقدان من الملاحظة بكل فئة عمرية عندما تظهر مفردات مفقودات من الملاحظة بالبيانات محل التحليل.

د- تقديـــر الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية يـــتعذر خلالهـــا تطبـــيق أسلوب الإمكان الأكبر؛ لتقدير مدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص، باستخدام التعريف النظرى للاحتمال.

١ – مقدمة

لقـــد ســـبق أن تعـــرض وجيه (٢٠٠٦ أ) لبناء جدول الحياة الفوجى* للتزايد والتناقص للحالـــة غيـــر الماصة محل الدراسة بنموذج يتضمن حالتين غير ماصتين وحالة ماصة واحدة عـــندما تتوفـــر بـــيانات فوجية كاملة، وذلك فى ظل افتراض صيغة أسية لدالة البقاء على قيد الحـــياة بكـــل فـــئة عمرية، وافتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية، بالإضافة لافتـــراض وجود علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية.

وسوف نتعرض لبناء جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة بنموذج يتضمن حالتين غير ماصتين وحالة ماصة واحدة عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة، وذلك فى ظل افتراض صيغة أسية لدالة البقاء على قيد الحياة بكل فئة عمرية، وافتراض ثبات المخاطـــر محل الدراسة بكل فئة عمرية، بالإضافة لافتراض وجود علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية.

ويلاحـــظ أنـــه تخـــتلف طبيعة البناء المقترح لجدول الحياة للتزايد والتناقص عن جدول الحياة الفوجـــى للتزايد والتناقص الذى قدمه Land et al. (1994)، والذى يتفق مع طبيعة بناء جداول الحـــياة الحالية للتزايد والتناقص الشائع استخدامها والتى أشار إليها وجيه (٢٠٠٦ أ). فيتضمن جدول الحياة Land et al. (1994) دالة غير متناقصة للبقاء على قيد الحياة، بحيث يُضاف إلى عـــدد الباقـــين على قيد الحياة عند بداية كل فئة عمرية بالحالة غير الماصة عدد الداخلين إليها خـــلال هذه الفئة العمرية ويُطرح منها عدد الخارجين منها خلال نفس الفئة العمرية للحصول

* جـــدول الحـــياة الحالـــى للتزايد والتناقص هو جدول حياة يتم بناؤه فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن معـــدلات الانـــتقال بـــين الحالات المختلفة محل الدراسة بكل فئة عمرية خلال سنة ميلادية معينة. أما جدول الحـــياة الفوجـــى للتزايد والتناقص فهو جدول حياة يتم بناؤه فى ضوء ما هو متوفر من بيانات تصف سلوك المفردات محل التحليل بين الحالات المختلفة محل الدراسة خلال فترة زمنية معينة.

علـــى عـــدد الباقين على قيد الحياة عند بداية الفئة العمرية التالية وذلك فى ظل افتراض أن لا تـــزيد حركة المفردات عن حركة واحدة بكل فئة عمرية. كما يتضمن جدول الحياة transition probabilities، وهـــى احـــتمالات الظهـــور بالحالـــة غير الماصة عند بداية فئة عمرية معينة والظهـــور بحالـــة أخرى من الحالات محل الدراسة عند بداية الفئة العمرية التالية. ومن خلال تعـــريف احتمالات الانتقال بين ٢ من الحالات غير الماصة وحالة ماصة واحدة كدالة أسية فى خـــصائص المفردات محل التحليل التى تتوفر بالـــ Panel data، تم تقدير هذه الاحتمالات وتم تقديـــر معـــدلات الانتقال بين الحالات المختلفة محل الدراسة بعد افتراض وجود علاقة بينها وبـــين الاحتمالات المناظرة لها. ومن ثَم تم استخدام الصيغة الأسية لدالة البقاء على قيد الحياة فـــى بناء جدول الحياة للتزايد والتناقص، الذى ليس هو بجدول الحياة بالمعنى المتعارف عليه، بالإضافة إلى أنه لا يميز بين سلوك سكان الحالة غير الماصة والملتحقات بها بكل فئة عمرية.

أمـــا البـــناء المقترح لجدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة بالنموذج الذى يتضمن حالتين غير ماصتين وحالة ماصة واحدة، فيُقصد به فى ضوء التعريف المـــتطور لجـــداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص وجيه (٢٠٠٦ أ)، عندما لا تتوفر بيانات فوجـــية كاملة؛ بناء جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة الذى يصف سلوك سكان* هذه الحالة خلال الفترة الزمنية المشاهدة، وبناء الجداول المرفقة به التى تصف سلوك الملتحقات** بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية خلال الفترة الزمنية المشاهدة.

وتعتبـــر المـــشكلة فى بناء جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة عندما لا تتوفـــر بـــيانات فوجية كاملة، حساب مدخلات جدول الحياة عندما تظهر مفردات مفقودات من الملاحظـــة، ولقـــد تعرض وجيه (٢٠٠٦ ب) لتقدير هذه المدخلات ولكن نحتاج لاستبعاد أثر خطـــر الفقـــدان من الملاحظة منها. كما تواجهنا مشكلة حساب مخرجات جدول الحياة؛ توقع الحـــياة وتوقع الحياة المعدل عند الأعمار المتتالية خلال الفترة الزمنية المشاهدة، فتوقع الحياة خـــلال الفتـــرة الزمنية المشاهدة يعتمد على سلوك المفردات عند الأعمار المتتالية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة التالية للفترة الزمنية المشاهدة.

أمـــا المـــشكلة عـــند بـــناء الجداول المرفقة بجدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراســـة التى تمثل سلوك الملتحقات بها من الدرجات المتتالية فتظهر فى حالة وجود مفردات

* ســـكان الحالـــة غير الماصة بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) هى المفردات التى تتم العمر x_n بهذه الحالة غير الماصة

** الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجة J بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) هى المفردات التى تنتقل إليها خلال هذه الفئة العمرية من بين الملتحقات بالحالة غير الماصة الأخرى محل الدراسة من الدرجة $(J-1)$

مفقـودات من الملاحظة، فنحتاج لاستبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة من الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية. وقد تمثل الاحتمالات التى تـصف سـلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة محل الدراسة من الدرجات المتتالية خلال فئة عمـرية معيـنة فى حد ذاتها مشكلة؛ عندما يتعذر تقدِير مدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصة خلال هذه الفئة العمرية باستخدام أسلوب الإمكان الأكبر.
وسـوف نهـتم باسـتبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة من مدخلات جداول الحياة الفوجية للتـزايد والتـناقص. كما سنهتم بتعريف توقع الحياة وتوقع الحياة المعدل عند كل عمر خلال الفتـرة الـزمنية المشاهدة عند بناء جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة. كـذلك سـوف نتعـرض لاستبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة من الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية. كما سنتعرض لاستخدام التعريف النظـرى للاحتمال فى تقدير الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية بفئة عمرية معينة، عندما لا يصلح استخدام أسلوب الإمكان الأكبر فى تقدير مـدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصة بهذه الفئة العمرية، وذلك عند بناء الجداول المرفقة بجدول الحياة المتناقص.

٢- بـناء جـدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة فى حالة توافر بيانات فوجية غير كاملة

يـستلزم بـناء جـدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصة **a**[*] بنموذج يتضمن حالتين غير ماصتين **a** و **b** وحالة ماصة واحدة **r**، عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة فـى ضـوء التعـريف المتطور لجداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص، تكوين جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة **a** الذى يصف سلوك سكان الحالة خلال الفترة الزمنية المشاهدة. فيُقصد بعدم توفر بيانات فوجية كاملة وجود مفردات خارجات عن الملاحظة (**withdrawals from observation**)، ووجـود مفردات مفقودات من الملاحظة (**losses from follow – up**). فالمفردات الخارجات عن الملاحظة خلال (x_n , x_{n+1}) هى المفردات التى تنتهى الفترة الزمنية المـشاهدة لها خلال هذه الفئة العمرية. والمفردات المفقودات من الملاحظة خلال (x_n , x_{n+1}) هـى المفـردات التى لا تتوفر عنها أية معلومات قبل انتهاء الفترة الزمنية المشاهدة لها بسبب عدم ظهورها فى المكان المحدد لها أثناء متابعتها.

[*] الحالة غير الماصة هى الحالة التى يمكن أن تدخل إليها المفردات ويمكن أن تخرج منها، أما الحالة الماصة فهى الحالة التى إذا دخلت إليها المفردات لا يمكن أن تخرج منها

سـوف يتم تكوين جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة a باستخدام الصيغة الأسية لدالة البقاء على قيد الحياة بكل فئة عمرية؛ فمدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة؛ وجيه (٢٠٠٦ ب)، يتم تقديرها فى ظل افتراض صيغة أسية لدالة البقاء على قيد الحياة بكل فئة عمرية، وافتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية، بالإضـافة لافتراض وجود علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية.

ويـستلزم تكـوين جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة a عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملـة حـساب دوال جـدول الحياة عند الأعمار المتتالية خلال الفترة الزمنية المشاهدة: فيتم حـساب مدخلات جدول الحياة ويتم حساب الدوال التى تصف مجتمع جدول الحياة ويتم حساب مخرجات جدول الحياة.

فسوف نتعرض لحل مشكلة استبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة من مدخلات جدول الحياة عـندما تظهـر مفـردات مفقودات من الملاحظة بالبيانات محل التحليل؛ لقد سبق أن تعرض وجـيه (٢٠٠٦ ب) لتقديـر مـدخلات جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عندما لا تتوفر بـيانات فوجـية كاملـة. كما سنتعرض لحساب مخرجات جدول الحياة؛ لقد سبق أن تعرض **Chiang (1968)** لحساب توقع الحياة عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة، ولم يتم بعد التعرض لحساب توقع الحياة المعدل. أما الدوال التالية، التى تصف مجتمع جدول الحياة: $^{a}l(x_n)$؛ عدد الـباقون علـى قـيد الحياة عند العمر x_n بين سكان الحالة a، و $_{h_n}^{\;a}d_{x_n}^{b}$*؛ عدد المفردات التى تنـتقل مـن الحالـة a إلـى الحالـة b خلال (x_n, x_{n+1}) بين سكان الحالة a، و $_{h_n}^{\;a}d_{x_n}^{r}$؛ عدد المفـردات التـى تنـتقل مـن الحالـة a إلى الحالة r خلال (x_n, x_{n+1}) بين سكان الحالة a، و $_{h_n}^{\;a}L_{x_n}$؛ عدد سنوات الحياة بين سكان الحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})، فليس هناك مشكلة فـى حـسابها باسـتخدام الصيغة الأسية لدالة البقاء على قيد الحياة فى ضوء مدخلات جدول الحياة.

٢-١ – حساب مدخلات جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة

لقـد قدر وجيه (٢٠٠٦ ب) مدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصـة a بنموذج يتضمن حالتين غير ماصتين a و b وحالة ماصة واحدة r عندما لا تتوفر بـيانات فوجـية كاملة. وتتطابق هذه التقديرات، مع المدخلات التالية لجدول الحياة المتناقص للحالـة غيـر الماصة a مباشرة، عندما تظهر بالبيانات مفردات خارجات عن الملاحظة فقط:

---

* $h_n = x_{n+1} - x_n$

${}^{a0}_{h_n}P_{x_n}$؛ احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a بين سكان الحالة a خلال (x_n, x_{n+1})، و ${}^{a0}_{h_n}P^{b}_{x_n}$؛ احتمال الانتقال للحالة b خلال (x_n, x_{n+1}) بين سكان الحالة a، و ${}^{a0}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$؛ احتمال الانتقال للحالة r خلال (x_n, x_{n+1}) بين سكان الحالة a. أما فى ظل وجود مفردات خارجات عن الملاحظة ومفردات مفقودات من الملاحظة بالبيانات، تستبدل المدخلات التالية لجدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة a: ${}^{a0}_{h_n}P_{x_n}$ و ${}^{a0}_{h_n}P^{b}_{x_n}$ و ${}^{a0}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$ و ${}^{a0}_{h_n}Q^{L}_{x_n}$؛ احتمال الانتقال للحالة L حالة الفقدان من الملاحظة خلال (x_n, x_{n+1}) بين سكان الحالة a، بالاحتمالات: ${}^{a0}_{h_n}P^{\cdot L}_{x_n}$؛ احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a خلال (x_n, x_{n+1}) بين سكان الحالة a بعد حذف أثر خطر الفقدان من الملاحظة، و ${}^{a0}_{h_n}P^{b\cdot L}_{x_n}$؛ احتمال الانتقال للحالة b خلال (x_n, x_{n+1}) بين سكان الحالة a بعد حذف أثر خطر الفقدان من الملاحظة، و ${}^{a0}_{h_n}Q^{r\cdot L}_{x_n}$ احتمال الانتقال للحالة r خلال (x_n, x_{n+1}) بين سكان الحالة a بعد حذف أثر خطر الفقدان من الملاحظة. ولقد تم إثبات أن الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة a وتستبعد أثر خطر الفقدان من الملاحظة، باستخدام تعريف **Chiang (1968)** للاحتمالات الجزئية الخام، تأخذ الشكل التالى:

$$ {}^{a0}_{h_n}P^{\cdot L}_{x_n} = {}^{a0}_{h_n}P_{x_n}^{\left(1-\frac{{}^{a0}_{h_n}Q^{L}_{x_n}}{(1-{}^{a0}_{h_n}P_{x_n})}\right)} $$

$$ {}^{a0}_{h_n}P^{b\cdot L}_{x_n} = \frac{{}^{a0}_{h_n}P^{b}_{x_n}}{(1-{}^{a0}_{h_n}P_{x_n}-{}^{a0}_{h_n}Q^{L}_{x_n})}\left(1-{}^{a0}_{h_n}P^{\cdot L}_{x_n}\right) $$

$$ {}^{a0}_{h_n}Q^{r\cdot L}_{x_n} = \frac{{}^{a0}_{h_n}Q^{r}_{x_n}}{(1-{}^{a0}_{h_n}P_{x_n}-{}^{a0}_{h_n}Q^{L}_{x_n})}\left(1-{}^{a0}_{h_n}P^{\cdot L}_{x_n}\right) $$

٢-٢- حساب مخرجات جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة

يُقصد بمخرجات جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة فى ضوء التعريف المتطور لجداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص، توقع الحياة وتوقع الحياة المعدل عند الأعمار المتتالية خلال الفترة الزمنية المشاهدة.

أ- تعريف توقع الحياة عند كل عمر بجدول الحياة

لقــد قــدم Chiang (1968) تعــريفاً لــتوقع الحــياة عند كل عمر خلال الفترة الزمنية المــشاهدة، عــندما لا تتوفــر بيانات فوجية كاملة، وذلك بعد أن قسم العمر إلى فئات عمرية طــولها ســنة خــلال الفترة الزمنية المشاهدة وخلال الفترة الزمنية التالية غير المشاهدة. ولقد افتــرض Chiang (1968) أن متوسط طول مدة البقاء على قيد الحياة للمتوفى بكل فئة عمرية 1/2 ســنة، كما افترض ثبات احتمال البقاء على قيد الحياة بكل فئة عمرية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة.

وســوف نقــسم الفترة الزمنية غير المشاهدة $\left(\infty - x_m\right]$ فقط إلى فئات عمرية طولها K سنة، حــيث تتميــز هذه الفترة الزمنية بأنه لا يمكن أن يحدث خلالها أكثر من ملتحقات من الدرجة الثانــية للحالــة غيــر الماصة؛ يستمر ظهورهن بها حتى نهاية الفئة العمرية التى يتم الانتقال خلالهــا إلــى الحالة غير الماصة. وسوف نفترض كما افترض Chiang (1968) ثبات احتمال الاســتمرار فــى الظهور بالحالة غير الماصة بين سكانها بكل فئة عمرية خلال الفترة الزمنية غيــر المشاهدة. كما سنفترض انتظام سلوك سكان الحالة غير الماصة الخارجين منها بكل فئة عمــرية خــلال الفتــرة الــزمنية غير المشاهدة؛ أى سنفترض أن متوسط مدة الاستمرار فى الظهــور بالحالة غير الماصة بين سكانها الخارجين منها بكل فئة عمرية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة $\left(a_m\ h_m\right) = \frac{K}{2}$ سنة، حيث $a_m = \frac{1}{2}$، h_m = طول الفئة العمرية $\left(x_m, x_{m+1}\right)$.

ففى ضوء مضمون الصيغة التى استخدمها Chiang (1968)، يعرف توقع الحياة بالحالة a عند العمــر x_n؛ $e\left(x_n\right)$، خلال الفترة الزمنية المشاهدة؛ $x_n < x_m$، عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة كالآتى:

$$e\left(x_n\right) = \sum_{y=0}^{m-n-1} \frac{{}_{h_{n+y}}^{\ a}L_{x_{n+y}}}{{}^{a}l\left(x_n\right)} + \frac{a_m\ h_m\ {}^{a}l\left(x_m\right)}{{}^{a}l\left(x_n\right)} + \sum_{y=m-n+1}^{\infty} c_{n+y}\ \frac{{}^{a}l\left(x_{n+y}\right)}{{}^{a}l\left(x_n\right)}.$$

حيث

$$c_{n+y} = h_{n+y-1}\left(1 - a_{n+y-1}\right) + h_{n+y}\ a_{n+y}$$

وفى ظل الفروض السابق الإشارة إليها يمكن إعادة صياغة $e\left(x_n\right)$ كالآتى:

$$e\left(x_n\right) = \sum_{y=0}^{m-n-1} \frac{{}_{h_{n+y}}^{\ a}L_{x_{n+y}}}{{}^{a}l\left(x_n\right)} + \frac{{}^{a}l\left(x_m\right) \cdot e\left(x_m\right)}{{}^{a}l\left(x_n\right)}.$$

حيث تمثل $e\left(x_m\right)$ توقع الحياة عند العمر x_m، ولقد تم إثبات أن:

$$e\left(x_m\right) = \frac{K}{2} + \frac{K\ {}_{h_m}^{a0}P_{x_m}}{\left(1 - {}_{h_m}^{a0}P_{x_m}\right)}.$$

وفــى ظــل الفروض التى اعتمد عليها Chiang (1968) لتعريف توقع الحياة عندما لا تتوفر بــيانات فوجــية كاملة، وأيضاً فى ظل فروض البحث، يتطابق توقع الحياة عند كل عمر من الأعمار خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة.

ب- تعريف توقع الحياة المعدل عند كل عمر بجدول الحياة

لقد عرف وجيه (٢٠٠٦ أ) توقع الحياة المعدل عند العمر x_n للحالة غير الماصة **a** بنموذج يتضمن الحالتين غير الماصتين **a** و **b** والحالة الماصة **r** عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة كالآتي:

$$eA(x_n) = e(x_n) + e_1 A(x_n) + e_2 A(x_n)$$

حيث تمثل $e_1 A(x_n)$ ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند العمر x_n بالحالة **a** الذي يعزى للمفردات التي تنتقل من الحالة **a** إلى الحالة **b** من بين الـ $^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة **a** خلال نفس الفئة العمرية. وتمثل $e_2 A(x_n)$ ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند العمر x_n بالحالة **a** الذى يعزى للمفردات التى تنتقل من الحالة **a** إلى الحالة **b** من بين الـ $^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة **a** خلال الفئات العمرية التالية لها.

فإذا افترضنا ثبات كافة الاحتمالات التى تصف حركة سكان الحالتين **a** و **b** والمفردات الملتحقات بهما من الدرجة الأولى والثانية بالفئات العمرية المتتالية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة، بالإضافة للفروض السابق الإشارة إليها عند تعريف توقع الحياة عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة، يمكن تعريف $e_1 A(x_n)$ و $e_2 A(x_n)$ لكل $(x_n < x_m)$ مع أخذ الفترة الزمنية غير المشاهدة فى الاعتبار كالآتى:

١- تعريف ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند عمر معين الذى يعزى للمفردات التى تخرج من الحالة غير الماصة محل الدراسة خلال أى فئة عمرية بعد هذا العمر وتعود للدخول إليها خلال نفس الفئة العمرية

ففى ضوء صيغة $e_1 A(x_n)$ التى قدمها وجيه (٢٠٠٦ أ) عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة، وبعد تقسيم الفترة الزمنية غير المشاهدة إلى فئات عمرية طولها **K** سنة لا يمكن أن يحدث خلالها سوى ملتحقات من الدرجة الأولى والثانية للحالة غير الماصة، يمكن تعريف $e_1 A(x_n)$ عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة كالآتى:

$$e_1 A(x_n) = \sum_{y=0}^{m-n-1} \sum_{J=1}^{*} \frac{^{a}l(x_{n+y})}{^{a}l(x_n)} \, {}^{ai(2J)}_{h_{n+y}}V_{x_{n+y}} \; {}^{ai(2J)}_{h_{n+y}}A_{x_{n+y}} + \sum_{y=m-n}^{\infty} \frac{^{a}l(x_{n+y})}{^{a}l(x_n)} \, {}^{ai2}_{h_{n+y}}V_{x_{n+y}} \; {}^{ai2}_{h_{n+y}}A_{x_{n+y}} \, .$$

* يتحدد الحد الأعلى فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن الملتحقات بالحالة **a** من الدرجات المتتالية خلال كل فئة عمرية

فـــإذا أخذنا فى الاعتبار رموز الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالتين a و b والملتحقات بهمـــا مـــن الـــدرجات المتتالـــية كما يتضح بالجدولين (١) و(٢)، يمكن تعريف الرموز التى تتضمنها العلاقة السابقة كما عرفها وجيه (٢٠٠٦ أ) كالآتى:

احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة (2J) خلال الفئة العمرية $\left(x_{n+y}, x_{n+y+1}\right)$؛ $= {}^{ai(2J)}_{h_{n+y}}V_{x_{n+y}}$
$J = 1,2\ldots$

$$= {}^{a0}_{h_{n+y}}P^{b}_{x_{n+y}} \prod_{c=0}^{J-1} {}^{bi(2c+1)}_{h_{n+y}}P^{a}_{x_{n+y}} \prod_{c=1}^{J-1} {}^{ai(2c)}_{h_{n+y}}P^{b}_{x_{n+y}}$$

متوســـط عـــدد سنوات الحياة بالحالة a التى تنتج عن الالتحاق من الدرجة $2J = {}^{ai(2J)}_{h_{n+y}}A_{x_{n+y}}$ بالحالة a خلال الفئة العمرية $\left(x_{n+y}, x_{n+y+1}\right)$؛ $J = 1,2\ldots$

$$= \left[{}^{ai(2J)}_{h_{n+y}}P_{x_{n+y}} \left(\frac{h_{n+y}}{2^{2J}} + eA\left(x_{n+y+1}\right) \right) + \left(1 - {}^{ai(2J)}_{h_{n+y}}P_{x_{n+y}}\right) \frac{h_{n+y}}{2^{2J+1}} \right] \qquad (1)$$

وفـــى ظـــل الفـــروض السابق الإشارة إليها، الخاصة بانتظام سلوك سكان الحالة غير الماصة الخارجـــين مـــنها بكـــل فئة عمرية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة، والخاصة بثبات كافة الاحـــتمالات التـــى تصف حركة مفردات سكان الحالتين a و b والمفردات الملتحقات بهما من الدرجة الأولى والثانية بالفئات العمرية المتتالية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة $\left[x_m, \infty\right)$، يمكن إعادة صياغة $e_1 A\left(x_n\right)$ كالآتى:

$$e_1 A\left(x_n\right) = \sum_{y=0}^{m-n-1} \sum_{J=1}^{*} \frac{{}^{a}l\left(x_{n+y}\right)}{{}^{a}l\left(x_n\right)} \; {}^{ai(2J)}_{h_{n+y}}V_{x_{n+y}} \; {}^{ai(2J)}_{h_{n+y}}A_{x_{n+y}} + \frac{{}^{a}l\left(x_m\right)}{{}^{a}l\left(x_n\right)} e_1 A\left(x_m\right)$$

ولقد تم إثبات أن:

$$e_1 A\left(x_m\right) = \frac{{}^{ai2}_{h_m}V_{x_m} \; {}^{ai2}_{h_m}A_{x_m}}{\left(1 - {}^{a0}_{h_m}P_{x_m}\right)}$$

حيث

$${}^{ai2}_{h_m}A_{x_m} = \left[\frac{K}{2^2} + e\left(x_m\right) \right]$$

وذلك بعد استبدال $eA\left(x_m\right)$ بـ $e\left(x_m\right)$ والتعويض عن ${}^{ai2}_{h_m}P_{x_m}$ بالقيمة (1) فى الصيغة (1).

ويلاحـــظ ثبات $e_1 A\left(x_{m+r}\right)$؛ $r = 0,1,2\ldots$، خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة، كما سبق أن لوحظ ثبات $e\left(x_{m+r}\right)$ خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة.

جدول (١)

الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة a والملتحقات بها

من الدرجات المتتالية خلال الفئة العمرية $\left(x_n, x_{n+1}\right)$

نوع الاحتمال / نوع المفردات المشاهدة بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+1}	احتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة b خلال (x_n, x_{n+1})	احتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة r خلال (x_n, x_{n+1})
سكان الحالة a	${}^{a0}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة الأولى	${}^{ai1}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة الثانية	${}^{ai2}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{ai2}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{ai2}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة J	${}^{aiJ}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{aiJ}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{aiJ}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$

جدول (٢)

الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة b والملتحقات بها

من الدرجات المتتالية خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

نوع الاحتمال / نوع المفردات المشاهدة بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة b حتى العمر x_{n+1}	احتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة a خلال (x_n, x_{n+1})	احتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة r خلال (x_n, x_{n+1})
سكان الحالة b	${}^{b0}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{b0}_{h_n}P^{a}_{x_n}$	${}^{b0}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة الأولى	${}^{bi1}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{bi1}_{h_n}P^{a}_{x_n}$	${}^{bi1}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة الثانية	${}^{bi2}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{bi2}_{h_n}P^{a}_{x_n}$	${}^{bi2}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة J	${}^{biJ}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{biJ}_{h_n}P^{a}_{x_n}$	${}^{biJ}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$

٢– تعريف ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند عمر معين الذى يعزى للمفردات التى تخرج من الحالة غير الماصة محل الدراسة خلال أى فئة عمرية بعد هذا العمر وتعود للدخول إليها خلال الفئات العمرية التالية لها

ففى ضوء صيغة $e_2 A(x_n)$ التى قدمها وجيه (٢٠٠٦ أ) عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة، وبعد تقسيم الفترة الزمنية غير المشاهدة إلى فئات عمرية طولها K سنة لا يمكن أن يحدث خلالها سوى ملتحقات من الدرجة الأولى والثانية للحالة غير الماصة، يمكن تعريف $e_2 A(x_n)$؛ $x_n < x_m$، عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة كالآتى:

$$e_2A(x_n)=\sum_{y=1}^{m-n-1}\sum_{z=y}^{m-n-1}\frac{{}^{a}l(x_{n+y-1})}{{}^{a}l(x_n)}\left[\sum_{J=0}^{*}{}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}V_{x_{n+y-1}}\ {}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}P_{x_{n+y-1}}\right]\ {}_{x_{n+z}}B_{x_{n+y}}\left[\sum_{u=0}^{**}{}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}V_{x_{n+z}}\ {}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}A_{x_{n+z}}\right]+$$
$$\sum_{y=1}^{m-n}\sum_{z=m-n}^{\infty}\frac{{}^{a}l(x_{n+y-1})}{{}^{a}l(x_n)}\left[\sum_{J=0}^{*}{}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}V_{x_{n+y-1}}\ {}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}P_{x_{n+y-1}}\right]{}_{x_{n+z}}B_{x_{n+y}}\ {}^{ai1}_{h_{n+z}}V_{x_{n+z}}\ {}^{ai1}_{h_{n+z}}A_{x_{n+z}}+$$
$$\sum_{y=m-n+1}^{\infty}\sum_{z=y}^{\infty}\frac{{}^{a}l(x_{n+y-1})}{{}^{a}l(x_n)}\ {}^{bi1}_{h_{n+y-1}}V_{x_{n+y-1}}\ {}^{bi1}_{h_{n+y-1}}P_{x_{n+y-1}}\ {}_{x_{n+z}}B_{x_{n+y}}\ {}^{ai1}_{h_{n+z}}V_{x_{n+z}}\ {}^{ai1}_{h_{n+z}}A_{x_{n+z}}.$$

حيث تعرف الرموز السابقة كما قدمها وجيه (٢٠٠٦ أ) كالآتى:

${}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}V_{x_{n+y-1}}$ = احتمال الالتحاق بالحالة b من الدرجة $(2J+1)$ بالفئة العمرية (x_{n+y-1},x_{n+y})؛ $J=0,1,2\ldots$

$$={}^{a0}_{h_{n+y-1}}P^{b}_{x_{n+y-1}}\prod_{c=0}^{J-1}{}^{bi(2c+1)}_{h_{n+y-1}}P^{a}_{x_{n+y-1}}\prod_{c=1}^{J}{}^{ai(2c)}_{h_{n+y-1}}P^{b}_{x_{n+y-1}}$$

${}_{x_{n+z}}B_{x_{n+y}}$ = احتمال الظهور بالحالة b عند العمر x_{n+z} إذا كانت المفردة تظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y}

$$=\prod_{s=y}^{z-1}\left[{}^{b0}_{h_{n+s}}P_{x_{n+s}}+\sum_{u=1}^{*}{}^{bi(2u)}_{h_{n+s}}V_{x_{n+s}}\ {}^{bi(2u)}_{h_{n+s}}P_{x_{n+s}}\right]$$

${}^{bi(2u)}_{h_{n+s}}V_{x_{n+s}}$ = احتمال الالتحاق بالحالة b من الدرجة $(2u)$ خلال الفئة العمرية (x_{n+s},x_{n+s+1})؛ $u=1,2\ldots$

$$={}^{b0}_{h_{n+s}}P^{a}_{x_{n+s}}\prod_{c=0}^{u-1}{}^{ai(2c+1)}_{h_{n+s}}P^{b}_{x_{n+s}}\prod_{c=1}^{u-1}{}^{bi(2c)}_{h_{n+s}}P^{a}_{x_{n+s}}$$

${}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}V_{x_{n+z}}$ = احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة $(2u+1)$ بالفئة العمرية (x_{n+z},x_{n+z+1})؛ $u=0,1,2\ldots$

$$={}^{b0}_{h_{n+z}}P^{a}_{x_{n+z}}\prod_{c=0}^{u-1}{}^{ai(2c+1)}_{h_{n+z}}P^{b}_{x_{n+z}}\prod_{c=1}^{u}{}^{bi(2c)}_{h_{n+z}}P^{a}_{x_{n+z}}$$

${}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}A_{x_{n+z}}$ = متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a التى تنتج عن الالتحاق من الدرجة $(2u+1)$ بالحالة a خلال الفئة العمرية (x_{n+z},x_{n+z+1})؛ $u=0,1,2\ldots$

$$=\left[{}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}P_{x_{n+z}}\left(\frac{h_{n+z}}{2^{2u+1}}+eA(x_{n+z+1})\right)+\left(1-{}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}P_{x_{n+z}}\right)\frac{h_{n+z}}{2^{2u+2}}\right]\qquad(2)$$

وفى ظل الفروض السابق الإشارة إليها، الخاصة بانتظام سلوك سكان الحالة غير الماصة الخارجين منها بكل فئة عمرية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة، والخاصة بثبات كافة

* يتحدد الحد الأعلى فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن الملتحقات بالحالة b من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية

** يتحدد الحد الأعلى فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن الملتحقات بالحالة a من الدرجات المتتالية بكل عمرية

الاحـــتمالات التـــى تصف حركة مفردات سكان الحالتين a و b والمفردات الملتحقات بهما من الدرجة الأولى والثانية بالفئات العمرية المتتالية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة $[x_m,\infty)$، يمكن إعادة صياغة $e_2\,A(x_n)$ كالآتى:

$$e_2\,A(x_n)=\sum_{y=1}^{m-n-1}\sum_{z=y}^{m-n-1}\frac{{}^{a}l(x_{n+y-1})}{{}^{a}l(x_n)}\left[\sum_{J=0}^{*}{}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}V_{x_{n+y-1}}\;{}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}P_{x_{n+y-1}}\right]{}_{x_{n+z}}B_{x_{n+y}}$$
$$\left[\sum_{u=0}^{**}{}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}V_{x_{n+z}}\;{}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}A_{x_{n+z}}\right]+{}^{ai1}_{h_m}V_{x_m}\;{}^{ai1}_{h_m}A_{x_m}\left[\frac{1}{(1-{}_{x_{m+1}}B_{x_m})}\right]\sum_{y=1}^{m-n}\frac{{}^{a}l(x_{n+y-1})}{{}^{a}l(x_n)}$$
$$\left[\sum_{J=0}^{*}{}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}V_{x_{n+y-1}}\;{}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}P_{x_{n+y-1}}\right]{}_{x_m}B_{x_{n+y}}+\frac{{}^{a}l(x_m)}{{}^{a}l(x_n)}\,e_2\,A(x_m).$$

حيث تم إثبات أن:

$$e_2\,A(x_m)={}^{bi1}_{h_m}V_{x_m}\;{}^{bi1}_{h_m}P_{x_m}\;{}^{ai1}_{h_m}V_{x_m}\;{}^{ai1}_{h_m}A_{x_m}\left[\frac{1}{(1-{}_{x_{m+1}}B_{x_m})}\right]\left[\frac{1}{(1-{}^{a0}_{h_m}P_{x_m})}\right]$$

وحيث تعرف ${}^{ai1}_{h_m}A_{x_m}$ و ${}_{x_{m+1}}B_{x_m}$ كالآتى:

$${}^{ai1}_{h_m}A_{x_m}=\left[{}^{ai1}_{h_m}P_{x_m}\left(\tfrac{K}{2}+e(x_m)\right)+\left(1-{}^{ai1}_{h_m}P_{x_m}\right)\tfrac{K}{2^2}\right]$$

وذلك بعد استبدال $e\,A(x_m)$ بـــ $e(x_m)$ فى الصيغة (2).

$${}_{x_{m+1}}B_{x_m}=\left[{}^{b0}_{h_m}P_{x_m}+{}^{bi2}_{h_m}V_{x_m}\right] \qquad , \qquad \text{نفترض أن } {}_{x_{m+1}}B_{x_m}<1$$

ويلاحـــظ ثبات $e_2\,A(x_{m+r})$؛ $r=0,1,2\ldots$، خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة، كما سبق أن لـــوحظ ثـــبات $e(x_{m+r})$ و $e_1\,A(x_{m+r})$ خـــلال الفتـــرة الزمنية غير المشاهدة. وتذكرنا هذه الملحـــوظة بالـــتوزيع الأســـى الـــذى يتميـــز بثـــبات **The mean residual life**[**]؛ **Klein and Moeschberger (1997)**.

٣- بناء الجداول المرفقة بجدول الحياة المتناقص

تصف الجداول المرفقة بجدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة a، سلوك الملتحقات بالحالـــة غير الماصة a من الدرجات المتتالية بمختلف الفئات العمرية. ويتضمن الجدول الذى يـــصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة a من الدرجة J؛ $J=1,2\ldots$، احتمال الالتحاق بالحالـــة a مـــن الدرجـــة J خـــلال الفئة العمرية (x_n,x_{n+1}) والاحتمالات التى تصف سلوك

---

[*] يـــتحدد الحـــد الأعلى فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن الملتحقات بالحالة b من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية

[**] يـــتحدد الحد الأعلى فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن الملتحقات بالحالة a من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية

[**] $E(X-x\,|\,X>x)=E(X)$

الملتحقات من الدرجة J بالحالة a خلال (x_n, x_{n+1}). وتواجهنا مشكلة عند تقدير هذه الاحتمالات في حالة وجود مفردات مفقودات من الملاحظة، فلابد من الحصول على الاحتمالات التي تستبعد أثر خطر الفقدان من الملاحظة. كما يتعذر تقدير هذه الاحتمالات خلال فئة عمرية معينة باستخدام أسلوب الإمكان الأكبر إذا كان عدد سكان الحالة غير الماصة محل الدراسة بهذه الفئة العمرية يساوى صفراً؛ كما يتضح بالمثال الذى قدمه وجيه (٢٠٠٦ ب). وسوف نتعرض لحل هاتين المشكلتين كالآتى:

٣-١- استبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة من الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية

عند استخدام نموذج يتضمن الحالتين غير الماصتين a و b والحالة الماصة r، يتم حساب الاحتمالات التالية التى تصف سلوك الملتحقات من الدرجة J بالحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1}): ${}^{aiJ}_{h_n}P_{x_n}$ و ${}^{aiJ}_{h_n}P^{b}_{x_n}$ و ${}^{aiJ}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$، بدلالة تقديرات مدخلات جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص الناتجة عن تطبيق أسلوب الإمكان الأكبر وجيه (٢٠٠٤).

وفى حالة وجود مفردات مفقودات من الملاحظة بالبيانات محل التحليل، ففى ضوء تعريف **Chiang (1968)** للاحتمالات الجزئية الخام، تم إثبات أن الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة a من الدرجة J والتى تستبعد أثر خطر الفقدان من الملاحظة بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})، تأخذ الشكل التالى:

احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a بين الملتحقات بها من الدرجة J خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) بعد استبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة $= {}^{aiJ}_{h_n}P^{\cdot L}_{x_n}$

$$= \left({}^{a0}_{h_n}P^{\cdot L}_{x_n}\right)^{{}^{aiJ}K_{x_n}/2^J}$$

احتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة b بين الملتحقات بالحالة a من الدرجة J خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) بعد استبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة $= {}^{aiJ}_{h_n}P^{b\cdot L}_{x_n}$

$$= \frac{{}^{a0}_{h_n}P^{b}_{x_n}}{\left(1-{}^{a0}_{h_n}P_{x_n}-{}^{a0}_{h_n}Q^{L}_{x_n}\right)}\left(1-\left({}^{a0}_{h_n}P^{\cdot L}_{x_n}\right)^{{}^{aiJ}K_{x_n}/2^J}\right)$$

احتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة r بين الملتحقات بالحالة a من الدرجة J خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) بعد استبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة $= {}^{aiJ}_{h_n}Q^{r\cdot L}_{x_n}$

$$= \frac{{}^{a0}_{h_n}Q^{r}_{x_n}}{\left(1-{}^{a0}_{h_n}P_{x_n}-{}^{a0}_{h_n}Q^{L}_{x_n}\right)}\left(1-\left({}^{a0}_{h_n}P^{\cdot L}_{x_n}\right)^{{}^{aiJ}K_{x_n}/2^J}\right)$$

حيث تعرف ${}^{aiJ}K_{x_n}$؛ $J = 1,2\ldots$ كالآتى:

$${}^{aiJ}U_{x_n} = {}^{aiJ}K_{x_n}\ {}^{a0}U_{x_n}$$

خطر الخروج من الحالة a بين الملتحقات بها من الدرجة J خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

$^{aiJ}U_{x_n} =$

$^{a0}U_{x_n} =$ خطر الخروج من الحالة a بين سكان الحالة a خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

٣-٢- استخدام التعريف النظرى للاحتمال فى تقدير الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية

فـى نمـوذج يتضمن الحالتين غير الماصتين a و b والحالة الماصة r، يستخدم أسلوب الإمكـان الأكبر فى تقدير مدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة a خلال الفئة العمـريـة (x_n, x_{n+1}): ${}^{a0}_{h_n}P_{x_n}$ و ${}^{a0}_{h_n}P^{b}_{x_n}$ و ${}^{a0}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$ و $^{aiJ}K_{x_n}$ و ${}^{b0}_{h_n}P_{x_n}$ و ${}^{b0}_{h_n}P^{a}_{x_n}$ و ${}^{b0}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$ و $^{biJ}K_{x_n}$؛ $J = 1,2...$، وتقـدر هـذه الاحتمالات فقط إذا كان عدد سكان الحالة غير الماصة الخارجين عن الملاحظة أو غير الخارجين عن الملاحظة بهذه الفئة العمرية لا يساوى صفراً. وتـستخدم هـذه الاحتمالات فى اشتقاق الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصـة مـن الـدرجات المتتالية خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) وجيه (٢٠٠٤). فإذا تعذر حـساب مدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة a خلال (x_n, x_{n+1}) باستخدام أسـلوب الإمكـان الأكبـر؛ كمـا يتضح بالمثال الذى قدمه وجيه (٢٠٠٦ ب)، يمكن اشتقاق الاحـتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة a خلال هذه الفئة العمرية باستخدام التعريف النظـرى للاحتمال فى ضوء التطوير لهذا التعريف الذى قدمه وجيه (١٩٩٦) لتقدير مدخلات جداول الحياة الفوجية.

فيـتم تكـوين فراغ معاينة يتضمن نتيجة تعرض الملتحقات من الدرجة J بالحالة a للمخاطر محـل الدراسـة خلال (x_n, x_{n+1}) سواء كانت هذه المفردات خارجات عن الملاحظة أو غير خارجـات عن الملاحظة. وفى ضوء الرموز التى تصف سلوك المفردات المشاهدة بالحالة a خـلال (x_n, x_{n+1})، غيـر الخارجـات عن الملاحظة والخارجات عن الملاحظة، كما يتضح بالجدولين (٣) و(٤) على التوالى، يمكن تكوين فراغ المعاينة المشار إليه كالآتى:

$$S = [\,^{aiJ}S_{x_n},\ {}^{aiJ}_{h_n}D^{b}_{x_n},\ {}^{aiJ}_{h_n}D^{r}_{x_n},\ ^{aiJw}S_{x_n},\ {}^{aiJw}_{h_n}D^{b}_{x_n},\ {}^{aiJw}_{h_n}D^{r}_{x_n}\,]$$

جدول (٣)

وصف سلوك المفردات غير الخارجات عن الملاحظة المشاهدة بالحالة a خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

نوع المفردات غير الخارجات عن الملاحظة المشاهدة	إجمالى عدد المفردات غير الخارجات عن الملاحظة المشاهدة	عدد المفردات غير الخارجات عن الملاحظة التى تنتقل	عدد المفردات غير الخارجات عن الملاحظة التى	عدد المفردات غير الخارجات عن الملاحظة

بالحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	بالحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	من الحالة a إلى الحالة b خلال (x_n, x_{n+1})	تنتقل من الحالة a إلى الحالة r خلال (x_n, x_{n+1})	التى تستمر فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+1}
سكان الحالة a	${}^{a0}T_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}D^b_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}D^r_{x_n}$	${}^{a0}S_{x_n}$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة الأولى	${}^{ai1}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}D^b_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}D^r_{x_n}$	${}^{ai1}S_{x_n}$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة الثانية	${}^{ai2}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{ai2}_{h_n}D^b_{x_n}$	${}^{ai2}_{h_n}D^r_{x_n}$	${}^{ai2}S_{x_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة J	${}^{aiJ}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{aiJ}_{h_n}D^b_{x_n}$	${}^{aiJ}_{h_n}D^r_{x_n}$	${}^{aiJ}S_{x_n}$

جدول (٤)
وصف سلوك المفردات الخارجات عن الملاحظة المشاهدة بالحالة a خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

نوع المفردات الخارجات عن الملاحظة المشاهدة بالحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	إجمالى عدد المفردات الخارجات عن الملاحظة المشاهدة بالحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b قبل الخروج عن الملاحظة خلال (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة r قبل الخروج عن الملاحظة خلال (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات التى تستمر فى الظهور بالحالة a حتى لحظة الخروج عن الملاحظة خلال (x_n, x_{n+1})
سكان الحالة a	${}^{a0w}T_{x_n}$	${}^{a0w}_{h_n}D^b_{x_n}$	${}^{a0w}_{h_n}D^r_{x_n}$	${}^{a0w}S_{x_n}$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة الأولى	${}^{ai1w}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{ai1w}_{h_n}D^b_{x_n}$	${}^{ai1w}_{h_n}D^r_{x_n}$	${}^{ai1w}S_{x_n}$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة الثانية	${}^{ai2w}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{ai2w}_{h_n}D^b_{x_n}$	${}^{ai2w}_{h_n}D^r_{x_n}$	${}^{ai2w}S_{x_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة J	${}^{aiJw}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{aiJw}_{h_n}D^b_{x_n}$	${}^{aiJw}_{h_n}D^r_{x_n}$	${}^{aiJw}S_{x_n}$

وفى ظل افتراض انتظام زمن الخروج عن الملاحظة وانتظام سلوك الملتحقات بالحالات غير الماصـــة من الدرجات المتتالية، يمكن تعريف الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة a من الدرجة J كالآتى:

$$ {}^{aiJ}_{h_n}P_{x_n} = \frac{{}^{aiJ}S_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}S_{x_n}}{{}^{aiJ}_{h_n}T_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}T_{x_n}} $$

$$ {}^{aiJ}_{h_n}P^{b}_{x_n} = \frac{{}^{aiJ}_{h_n}D^{b}_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}D^{b}_{x_n}}{{}^{aiJ}_{h_n}T_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}T_{x_n}} $$

$$ {}^{aiJ}_{h_n}Q^{r}_{x_n} = \frac{{}^{aiJ}_{h_n}D^{r}_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}D^{r}_{x_n}}{{}^{aiJ}_{h_n}T_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}T_{x_n}} \quad , \ J = 1,2\ldots $$

أما إذا كان هناك مفردات مفقودات من الملاحظة فيأخذ فراغ المعاينة الشكل التالى:

$$ S = [\ {}^{aiJ}S_{x_n}\ ,\ {}^{aiJ}_{h_n}D^{b}_{x_n}\ ,\ {}^{aiJ}_{h_n}D^{r}_{x_n}\ ,\ {}^{aiJ}_{h_n}D^{L}_{x_n}\ ,\ {}^{aiJw}S_{x_n}\ ,\ {}^{aiJw}_{h_n}D^{b}_{x_n}\ ,\ {}^{aiJw}_{h_n}D^{r}_{x_n}\ ,\ {}^{aiJw}_{h_n}D^{L}_{x_n}\ ] $$

حيث

${}^{aiJ}_{h_n}D^{L}_{x_n}$ = عـــدد المفـــردات المفقودات من الملاحظة بين المفردات غير الخارجات عن الملاحظة الملتحقات بالحالة a من الدرجة J خلال (x_n , x_{n+1})

${}^{aiJw}_{h_n}D^{L}_{x_n}$ = عـــدد المفـــردات المفقـــودات من الملاحظة بين المفردات الخارجات عن الملاحظة الملتحقات بالحالة a من الدرجة J خلال (x_n , x_{n+1})

ويمكن فى هذه الحالة تعريف الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة a من الدرجة J خـــلال (x_n , x_{n+1}) وتـــستبعد أثـــر خطر الفقدان من الملاحظة، فى ظل افتراض انتظام زمن الفقدان من الملاحظة بالإضافة للفروض السابقة كالآتى:

$$ {}^{aiJ}_{h_n}P^{\cdot L}_{x_n} = \frac{{}^{aiJ}S_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}S_{x_n}}{{}^{aiJ}_{h_n}T_{x_n} - \frac{1}{2}\,{}^{aiJ}_{h_n}D^{L}_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}T_{x_n} - \frac{1}{4}\,{}^{aiJw}_{h_n}D^{L}_{x_n}} $$

$$ {}^{aiJ}_{h_n}P^{b\cdot L}_{x_n} = \frac{{}^{aiJ}_{h_n}D^{b}_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}D^{b}_{x_n}}{{}^{aiJ}_{h_n}T_{x_n} - \frac{1}{2}\,{}^{aiJ}_{h_n}D^{L}_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}T_{x_n} - \frac{1}{4}\,{}^{aiJw}_{h_n}D^{L}_{x_n}} $$

$$ {}^{aiJ}_{h_n}Q^{r\cdot L}_{x_n} = \frac{{}^{aiJ}_{h_n}D^{r}_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}D^{r}_{x_n}}{{}^{aiJ}_{h_n}T_{x_n} - \frac{1}{2}\,{}^{aiJ}_{h_n}D^{L}_{x_n} + \frac{1}{2}\,{}^{aiJw}_{h_n}T_{x_n} - \frac{1}{4}\,{}^{aiJw}_{h_n}D^{L}_{x_n}} \quad , \ J = 1,2\ldots $$

حـــيث نفتـــرض أن المفردات المفقودات من الملاحظة غير الخارجات عن الملاحظة تتعرض لتأثيـــر المخاطر محل الدراسة قبل الفقدان من الملاحظة عند منتصف الفترة الزمنية المشاهدة لها بالحالة a خلال الفئة العمرية (x_n , x_{n+1}). ونفترض أن المفردات المفقودات من الملاحظة بين الخارجات عن الملاحظة تتعرض لتأثير المخاطر محل الدراسة قبل الفقدان من الملاحظة عـــند منتـــصف الفترة الزمنية المشاهدة لها بالحالة a قبل لحظة الخروج عن الملاحظة خلال الفئة العمرية (x_n , x_{n+1}).

ويتضمن الجدولان (٥) و(٦) وصفاً للرموز التى تمثل سلوك المفردات المشاهدة بالحالة b سواء كانت غير خارجات عن الملاحظة أو خارجات عن الملاحظة خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}).

جدول (٥)

وصف سلوك المفردات غير الخارجات عن الملاحظة

المشاهدة بالحالة b خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

نوع المفردات غير الخارجات عن الملاحظة المشاهدة بالحالة b بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	إجمالى عدد المفردات غير الخارجات عن الملاحظة المشاهدة بالحالة b بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات غير الخارجات عن الملاحظة التى تنتقل من الحالة b إلى الحالة a خلال (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات غير الخارجات عن الملاحظة التى تنتقل من الحالة b إلى الحالة r خلال (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات غير الخارجات عن الملاحظة التى تستمر فى الظهور بالحالة b حتى العمر x_{n+1}
سكان الحالة b	${}^{b0}T_{x_n}$	${}^{b0}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{b0}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{b0}S_{x_n}$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة الأولى	${}^{bi1}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{bi1}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bi1}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{bi1}S_{x_n}$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة الثانية	${}^{bi2}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{bi2}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bi2}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{bi2}S_{x_n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
الملتحقات بالحالة b من الدرجة J	${}^{biJ}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{biJ}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{biJ}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{biJ}S_{x_n}$

جدول (٦)

وصف سلوك المفردات الخارجات عن الملاحظة

المشاهدة بالحالة b خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

نوع المفردات الخارجات عن	إجمالى عدد المفردات الخارجات	عدد المفردات التى تنتقل من الحالة b	عدد المفردات التى تنتقل من الحالة b	عدد المفردات التى تستمر فى الظهور

الملاحظة المشاهدة بالحالة b بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	عن الملاحظة المشاهدة بالحالة b بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	إلى الحالة a قبل الخروج عن الملاحظة خلال (x_n, x_{n+1})	إلى الحالة r قبل الخروج عن الملاحظة خلال (x_n, x_{n+1})	بالحالة b حتى لحظة الخروج عن الملاحظة خلال (x_n, x_{n+1})
سكان الحالة b	${}^{b0w}T_{x_n}$	${}^{b0w}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{b0w}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{b0w}S_{x_n}$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة الأولى	${}^{bi1w}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{bi1w}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bi1w}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{bi1w}S_{x_n}$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة الثانية	${}^{bi2w}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{bi2w}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bi2w}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{bi2w}S_{x_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة J	${}^{biJw}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{biJw}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{biJw}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{biJw}S_{x_n}$

٤ – التطبيق

سوف نتعرض لبناء جدول حياة فوجى للتزايد والتناقص عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة باستخدام المثال المفترض التالى: فيمكن أن نتصور أنه فى دراسة خاصة تم تتبع عدد 1000 من الإناث المتزوجات عند العمر 20 وعدد 1500 من الإناث غير المتزوجات عند العمر 20 وفقاً لطول الفترة الزمنية المشاهدة لكل منهن حتى العمر 35 سنة. فيصف الجدولان (٧) و(٨) سلوك المفردات سكان الحالة متزوج a والمفردات الملتحقات بها من الدرجة الأولى على التوالى، سواء كانت هذه المفردات غير خارجات عن الملاحظة أو خارجات عن الملاحظة. ويصف الجدولان (٩) و(١٠) سلوك المفردات سكان الحالة غير متزوج b والمفردات الملتحقات بهما من الدرجة الأولى على التوالى، سواء كانت هذه المفردات غير خارجات عن الملاحظة أو خارجات عن الملاحظة. ونفترض أن الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة a أو بالحالة b بكل فئة عمرية (x_n, x_{n+1}) يستمر ظهورهن بالحالة التى يلتحقن بها حتى العمر x_{n+1} أو حتى لحظة الخروج عن الملاحظة.

جدول (٧)

وصف سلوك سكان الحالة متزوج a غير الخارجين عن الملاحظة والخارجين عن الملاحظة بكل فئة عمرية

x_n	${}^{a0}T_{x_n}$	${}^{a0}S_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{a0w}T_{x_n}$	${}^{a0w}S_{x_n}$	${}^{a0w}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{a0w}_{h_n}D^{r}_{x_n}$
20 - 25	810	780	28	2	190	171	16	3
25 - 30	903	869	32	2	530	488	40	2
30 - 35	0	0	0	0	1080	1037	39	4

جدول (٨)

وصف سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة متزوج a

غير الخارجات عن الملاحظة والخارجات عن الملاحظة بكل فئة عمرية

x_n	${}^{ai1}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{ai1}S_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{ai1w}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{ai1w}S_{x_n}$	${}^{ai1w}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{ai1w}_{h_n}D^{r}_{x_n}$
20 - 25	690	635	53	2	196	176	17	3
25 - 30	210	191	16	3	102	91	9	2
30 - 35	0	0	0	0	57	51	5	1

جدول (٩)

وصف سلوك سكان الحالة غير متزوج b غير الخارجين عن الملاحظة

والخارجين عن الملاحظة بكل فئة عمرية

x_n	${}^{b0}T_{x_n}$	${}^{b0}S_{x_n}$	${}^{b0}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{b0}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{b0w}T_{x_n}$	${}^{b0w}S_{x_n}$	${}^{b0w}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{b0w}_{h_n}D^{r}_{x_n}$
20 - 25	1155	462	690	3	345	145	196	4
25 - 30	351	139	210	2	173	69	102	2
30 - 35	0	0	0	0	165	106	57	2

جدول (١٠)

وصف سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة غير متزوج b

غير الخارجات عن الملاحظة والخارجات عن الملاحظة بكل فئة عمرية

x_n	${}^{bi1}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{bi1}S_{x_n}$	${}^{bi1}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bi1}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{bi1w}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{bi1w}S_{x_n}$	${}^{bi1w}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bi1w}_{h_n}D^{r}_{x_n}$
20 - 25	28	9	18	1	16	4	11	1
25 - 30	32	10	20	2	40	11	27	2
30 - 35	0	0	0	0	39	27	11	1

ولقد تم تقدير مدخلات جدول الحياة الفوجي للتزايد والتناقص للحالة متزوج a بكل فئة عمرية باستخدام البيانات السابق الإشارة إليها، كما يتضح بالجدول (١١). ثم تم تكوين جدول الحياة للتزايد والتناقص للحالة متزوج a، الذى يضم جدول الحياة المتناقص للحالة a والجداول المرفقة به التى تصف سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى والدرجة الثانية بالحالة a كما يتضح بالجداول (١٢) و(١٣) و(١٤) على التوالى.

جدول (١١)

مدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة متزوج a

x_n	${}^{a0}_{h_n}\hat{P}_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}\hat{P}^{b}_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}\hat{Q}^{r}_{x_n}$	${}^{ai1}\hat{K}_{x_n}$	${}^{b0}_{h_n}\hat{P}_{x_n}$	${}^{b0}_{h_n}\hat{P}^{a}_{x_n}$	${}^{b0}_{h_n}\hat{Q}^{r}_{x_n}$	${}^{bi1}\hat{K}_{x_n}$
20 - 25	.9461	.0496	.0043	3.5891	.3576	.6361	.0063	2.8902
25 - 30	.9355	.0590	.0055	3.6228	.3284	.6570	.0146	3.0815
30 - 35	.9220	.0700	.0080	0.5480	.4110	.5641	.0249	1.6541

جدول (١٢)
جدول الحياة المتناقص للحالة متزوج a

x_n	${}^{a0}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{a0}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$	${}^{a}l(x_n)$	${}^{a}_{h_n}d^{b}_{x_n}$	${}^{a}_{h_n}d^{r}_{x_n}$	${}^{a}_{h_n}L_{x_n}$	$e(x_n)$	$eA(x_n)$
20 - 25	.9461	.0496	.0043	10000	496	43	48559	23.7613	27.1747
25 - 30	.9355	.0590	.0055	9461	558	52	45865	19.9825	22.4574
30 - 35	.9220	.0700	.0080	8851	620	71	42654	16.1777	17.7568
35 +	-	-	-	8160	-	-	-	12.3205	13.4576

– لا تتوفر بيانات عنها

جدول (١٣)
وصف سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة a

x_n	احتمال الالتحاق من الدرجة الأولى بالحالة a	${}^{ai1}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
20 - 25	.6361	.9054	.0871	.0075
25 - 30	.6570	.8862	.1041	.0097
30 - 35	.5641	.9780	.0197	.0023

جدول (١٤)
وصف سلوك الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة a

x_n	احتمال الالتحاق من الدرجة الثانية بالحالة a	سلوك الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة a
20 - 25	.0380	لقد تم افتراض استمرار ظهور الملتحقات بالحالة a من الدرجة الثانية بكل فئة عمرية (x_n, x_{n+1}) بهذه الحالة حتى العمر x_{n+1}
25 - 30	.0473	
30 - 35	.0349	

ولقد استلزم حساب توقع الحياة وتوقع الحياة المعدل، توفير بيانات عن الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالتين a و b والملتحقات بهما من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية خلال

الفتــرة الــزمنية غير المشاهدة؛ أى خلال الأعمار $(100-35)$، بعد تقسيمها إلى فئات عمرية طــولها ســنة. ثم تم تطبيق الصيغ الرياضية السابق الحصول عليها لــ $e(x_n)$ و $e_1 A(x_n)$ و $e_2 A(x_n)$.

ولقد تم تقدير الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالتين a و b والملتحقات بهما من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة $(x_m = 35,\infty]$ كالآتى:

أ- تقدير قيمة للاحتمالين ${}^{a0}_{h_m}P_{x_m}$ و ${}^{b0}_{h_m}P_{x_m}$

${}^{a0}_{5}P_{30}$= احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a حتى العمر 35 بين سكان الحالة a عند العمر 30

= احــتمال الاســتمرار فــى الظهور بالحالة a من العمر 30 حتى العمر 31 × احتمال الاســتمرار فــى الظهــور بالحالة a من العمر 31 حتى العمر 32 × ... × احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a من العمر 34 حتى العمر 35 = الحد الأدنى لاحتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a بكل عمر من أعمار الفئة العمرية (35 – 30).

ونظــراً لأن ظــروف الوفاة خلال الأعمار (100 – 35) تختلف كثيراً عن ظروف الوفاة خلال الفــئة العمــرية (35 – 30)، فأعــتقد أنــه مــن المنطقى أن نفترض أن الحد الأدنى لاحتمال الاســتمرار فــى الظهــور بالحالــة a بين سكان الحالة a بكل عمر من أعمار الفئة العمرية (35 – 30) = احــتمال الاســتمرار فى الظهور بالحالة a بكل عمر بين سكان الحالة a خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة. أى أننا سوف نفترض أن ${}^{a0}_{h_m}\hat{P}_{x_m}={}^{a0}_{5}\hat{P}_{30}=0.9220$.

كــذلك بالنــسبة لـــ ${}^{b0}_{h_m}P_{x_m}$، ففــى ضــوء نفــس التــصور الــسابق يمكن أن نفترض أن ${}^{b0}_{h_m}\hat{P}_{x_m}={}^{b0}_{5}\hat{P}_{30}=0.4110$.

ب- تقدير قيمة للاحتمالين ${}^{ai1}_{h_m}P_{x_m}$ و ${}^{bi1}_{h_m}P_{x_m}$

${}^{ai1}_{5}P_{30}$= احــتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a حتى العمر 35 بين الملتحقات بالحالة a من الدرجة الأولى خلال الأعمار (35 – 30)

= احــتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a حتى العمر 35 بين الملتحقات من الدرجة الأولــى بالحالــة a عــند العمر 30 + احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a حتى العمر 35 بين الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة a عند العمر 31 + ... + احتمال الاســتمرار فــى الظهور بالحالة a حتى العمر 35 بين الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة a عند العمر 34.

فإذا افترضنا تساوى هذه الاحتمالات، يمكن أن نعرف احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a بكـل عمر من الأعمار خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة بين الملتحقات بالحالة a من الدرجة الأولـى عـند هذا العمر؛ ${}^{a i1}_{h_m}P_{x_m}$، بأنه يساوى $\frac{{}^{a i1}_{5}P_{30}}{5}$، على أساس أن هذه القيمة تمثل الحد الأدنـى لاحـتمال الاسـتمرار فـى الظهـور بالحالة a بكل عمر من الأعمار بالفئة العمرية (35 – 30) بـين الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة a عند هذا العمر. بالتالى سوف نفترض أن ${}^{a i1}_{h_m}\hat{P}_{x_m} = \frac{{}^{a i1}_{5}\hat{P}_{30}}{5} = \frac{.9780}{5} = 0.1956$.

بالمثل بالنسبة لـ ${}^{b i1}_{h_m}P_{x_m}$، يمكن أن نفترض أن ${}^{b i1}_{h_m}\hat{P}_{x_m} = \frac{{}^{b i1}_{5}\hat{P}_{30}}{5} = \frac{.4793}{5} = 0.0959$

جـ- تقدير قيمة للاحتمالين ${}^{a i1}_{h_m}V_{x_m}$ و ${}^{b i1}_{h_m}V_{x_m}$

${}^{a i1}_{5}V_{30}$= احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة الأولى خلال الأعمار (35 – 30)

= احـتمال الالتحاق من الدرجة الأولى بالحالة a عند العمر 30 + احتمال الالتحاق من الدرجـة الأولى بالحالة a عند العمر 31 + ... + احتمال الالتحاق من الدرجة الأولى بالحالة a عند العمر 34.

فـإذا افترضـنا تساوى هذه الاحتمالات، يمكن أن نعرف احتمال الالتحاق من الدرجة الأولى بالحالـة a عند عمر معين خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة؛ ${}^{a i1}_{h_m}V_{x_m}$، بأنه يساوى $\frac{{}^{a i1}_{5}V_{30}}{5}$.

بالتالى سوف نفترض أن ${}^{a i1}_{h_m}\hat{V}_{x_m} = \frac{.5641}{5} = 0.1128$.

بالمثل بالنسبة لـ ${}^{b i1}_{h_m}V_{x_m}$، يمكن أن نفترض أن ${}^{b i1}_{h_m}\hat{V}_{x_m} = \frac{{}^{b i1}_{5}\hat{V}_{30}}{5} = \frac{.0700}{5} = 0.0140$.

د- تقدير قيمة للاحتمالين ${}^{a i2}_{h_m}V_{x_m}$ و ${}^{b i2}_{h_m}V_{x_m}$

${}^{a i2}_{5}V_{30}$= احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة الثانية خلال الأعمار (35 – 30)

= احـتمال الالـتحاق بالحالـة a من الدرجة الثانية عند العمر 30 + احتمال الالتحاق بالحالـة a مـن الدرجة الثانية عند العمر 31 + ... + احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة الثانية عند العمر 34.

فـإذا افترضـنا تـساوى هذه الاحتمالات، يمكن أن نعرف احتمال الالتحاق من الدرجة الثانية بالحالة a عند عمر معين خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة؛ ${}^{a i2}_{h_m}V_{x_m}$، بأنه يساوى $\frac{{}^{a i2}_{5}V_{30}}{5}$.

بالتالى سوف نفترض أن ${}^{a i2}_{h_m}\hat{V}_{x_m} = \frac{.0349}{5} = 0.0070$.

بالمثل بالنسبة لـ ${}^{b12}_{h_m}V_{x_m}$، يمكن أن نفترض أن ${}^{b12}_{h_m}\hat{V}_{x_m} = \frac{{}^{b12}_{5}\hat{V}_{30}}{5} = \frac{.0111}{5} = 0.0022$.

وبالتعويض بهذه القيم للاحتمالات فى الصيغ الرياضية لـ $e(x_n)$ و $e_1 A(x_n)$ و $e_2 A(x_n)$، يتم الحصول على توقع الحياة وتوقع الحياة المعدل بجزئيه عند كل عمر من الأعمار خلال الفترة الزمنية المشاهدة جدول (١٥).

وكما يتضح بجدول (١٥) تأخذ $e_1 A(x_n)$ و $e_2 A(x_n)$ اتجاهاً متناقصاً مع تقدم العمر، مما يتفق مع الاتجاه المتناقص لهما بالمثال الذى قدمه وجيه (٢٠٠٦ أ)، عندما تعرض لبناء جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة متزوج عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة. ولكن يلاحظ بصفة عامة انخفاض قيمة توقع الحياة $e(x_n)$، عن ما هو مشاهد بالمثال الذى قدمه وجيه (٢٠٠٦ أ)، ويعزى ذلك أساساً للقيمة التى تم اختيارها لاحتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة متزوج بين سكان هذه الحالة بكل عمر من الأعمار خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة؛ ${}^{a0}_{h_m}P_{x_m}$. فأعتقد أنه كان لابد أن يتم اختيار قيمة للاحتمال ${}^{a0}_{h_m}P_{x_m}$ فى ضوء القيمة المتوسطة لمعدل الوفاة خلال الأعمار (100 - 35). فبمجرد أن ترتفع قيمة ${}^{a0}_{h_m}P_{x_m}$ من القيمة التى تم اختيارها (0.9220) إلى 0.94، ترتفع قيمة توقع الحياة عند الأعمار المتتالية خلال الفترة الزمنية المشاهدة كالآتى: $e(20) = 26.8998$، $e(25) = 23.2998$، $e(30) = 19.7237$، $e(35) = 16.1667$.

جدول (١٥)

مكونات توقع الحياة المعدل

x_n	$e(x_n)$	$e_1 A(x_n)$	$e_2 A(x_n)$	$eA(x_n)$
20 – 25	23.7613	3.1263	.2871	27.1747
25 – 30	19.9825	2.3522	.1200	22.4574
30 – 35	16.1777	1.5533	.0258	17.7568
35 +	12.3205	1.1281	.0090	13.4576

٥- الخلاصة

يهتم البحث ببناء جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة، من خلال استخدام نموذج يتضمن حالتين غير ماصتين وحالة ماصة واحدة. لقد سبق أن اهتم وجيه (٢٠٠٦ أ) ببناء جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة. كما سبق أن اهتم وجيه (٢٠٠٦ ب) بتقدير مدخلات جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة وعندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة.

وتظهر العديد من المشاكل عند بناء جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عندما لا تتوفر بيانات فوجية كاملة. فيعنى بناء جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة غير الماصة

محـــل الدراسة، بناء جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة وبناء الجداول المرفقة به التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية؛ وجيه (٢٠٠٦ أ).

ويـــستلزم بناء جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة، عندما تظهر مفردات مفقـــودات مـــن الملاحظة، استبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة من مدخلات جداول الحياة الفوجـــية للتـــزايد والتـــناقص. ولقـــد تم اشتقاق الاحتمالات التى تستبعد أثر خطر الفقدان من الملاحظـــة فـــى ضـــوء تعريف **Chiang (1968)** للاحتمالات الجزئية الخام. كما يستلزم بناء جـــدول الحـــياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة، تعريف توقع الحياة وتوقع الحياة المعـــدل عـــند كل عمر خلال الفترة الزمنية المشاهدة، فى ضوء فروض البحث خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة التالية للفترة الزمنية المشاهدة. لقد تم تقسيم الفترة الزمنية غير المشاهدة إلـــى فئات عمرية طولها **K** سنة؛ لا يمكن أن يحدث خلالها سوى ملتحقات من الدرجة الأولى والثانـــية للحالات غير الماصة، بحيث يستمر ظهور الملتحقات من الدرجة الثانية بفئة عمرية معيـــنة بالحالـــة التـــى يلتحقن بها حتى نهاية هذه الفئة العمرية. ولقد تم افتراض انتظام سلوك ســـكان الحالة غير الماصة الخارجين منها بكل فئة عمرية خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة، كمـــا تم افتراض ثبات كافة الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالتين غير الماصتين محل الدراســـة والملتحقات بهما من الدرجة الأولى والثانية بكل فئة عمرية خلال الفترة الزمنية غير المـــشاهدة. ولقـــد تـــم اشتقاق الصيغة العامة لتوقع الحياة والصيغة العامة لتوقع الحياة المعدل بجزئيه عند كل عمر فى ظل الفروض السابق الإشارة إليها. لقد سبق لـــ **Chiang (1968)** أن قـــسم الزمن إلى فئات عمرية طولها سنة وافترض انتظام سلوك الوفيات بكل فئة عمرية خلال الـــزمن، بالإضـــافة لافتراض ثبات احتمال البقاء على قيد الحياة بكل فئة عمرية خلال الفترة الـــزمنية غيـــر المشاهدة. ونتج عن تعريف توقع الحياة فى ظل فروضه ثبات توقع الحياة عند كـــل عمر خلال الفترة الزمنية غير المشاهدة. كذلك نتج عن فروض البحث تطابق قيمة توقع الحـــياة وتطابـــق قـــيمة توقـــع الحياة المعدل بجزئيه عند كل عمر خلال الفترة الزمنية غير المـــشاهدة كما هو الحال فى ظل التوزيع الأسى. ولم يكن لهذه النتيجة غير الواقعية تأثير يذكر علـــى قـــيمة توقع الحياة وقيمة توقع الحياة المعدل بجزئيه، كما يتضح بالمثال الذى تم تطبيقه، الـــذى يتعـــرض لبـــناء جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص للحالة متزوج فى ظل نموذج يتـــضمن الحالـــة متزوج والحالة غير متزوج وحالة الوفاة. أيضاً يظهر عدد من المشاكل عند بـــناء الجـــداول المـــرفقة بجـــدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة. فنحتاج لاستبعاد أثر خطر الفقدان من الملاحظة من الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالات غيـــر الماصـــة من الدرجات المتتالية، عندما تضم البيانات محل التحليل مفردات مفقودات من الملاحظـــة. ولقـــد تم اشتقاق هذه الاحتمالات التى تستبعد أثر خطر الفقدان من الملاحظة فى

ضـــوء تعـــريف Chiang (1968) للاحتمالات الجزئية الخام. كذلك قد يتعذر استخدام أسلوب الإمكـــان الأكبر فى تقدير مدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص بفئة عمرية معينة، فـــلا نستطيع تقدير الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالـــية بهـــذه الفـــئة العمـــرية، لذلك تم استخدام التعريف النظرى للاحتمال فى تقدير هذه الاحتمالات طبقاً لما قدمه وجيه (١٩٩٦).

المراجع العربية

١- وجـــيه، م. م. ١٩٩٦. *تطوير التعريف النظرى للاحتمال الذى يستخدم فى تقدير مدخلات جـــداول الحـــياة الفوجـــية. المؤتمر السنوى الحادى والثلاثون للإحصاء وعلوم الحاسب وبحوث العمليات. معهد الدراسات والبحوث الإحصائية ـــ جامعة القاهرة.*

٢- وجـــيه، م. م. ٢٠٠٤. *وصـــف ســـلوك الملتحقات بالحالات غير الماصة بجداول الحياة للتزايد والتناقص عندما تكون هناك علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين ســـكانها وبـــين الملـــتحقات بها بكل فئة عمرية. المؤتمر السنوى السادس عشر للإحصاء والـــنمذجة الآلية فى العلوم الاجتماعية والإنسانية. قسم الإحصاء ومركز نظم المعلومات والحاسبات الإلكترونية بكلية الاقتصاد والعلوم السياسية ـــ جامعة القاهرة.*

٣- وجـــيه، م. م. ٢٠٠٦ أ. *"تعـــريف أكثـــر تطوراً لجداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عـــندما تتوفـــر بـــيانات فوجـــية كاملـــة". المجلة المصرية للسكان وتنظيم الأسرة. معهد الدراسات والبحوث الإحصائية ـــ جامعة القاهرة. المجلد التاسع والثلاثون، العدد الأول.*

٤- وجـــيه، م. م. ٢٠٠٦ ب. *"تقدير مدخلات جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص". المجلة المصرية للسكان وتنظيم الأسرة. معهد الدراسات والبحوث الإحصائية ـــ جامعة القاهرة. المجلد التاسع والثلاثون، العدد الثانى.*

المراجع الأجنبية

5- Chiang; C. L. 1968. *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*. John Wiley & sons. Inc.

6- Klein; John P., Moeschberger; Melvin L. 1997. *Survival analysis Techniques for Censored and Truncated Data*. Springer.

7- Land; Kenneth C., Guralnick; Jack M., Blazer; Don G. 1994. "Estimating increment – decrement life tables with multiple covariates from panel data: The case of active life expectancy". *Demography*. Vol. 31.