المجلة المصرية للسكان وتنظيم الأسرة
معهد الدراسات والبحوث الاحصائية
المجلد ٣٩ – العدد الأول ٢٠٠٦

تعريف أكثر تطوراً لجداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة

د. مها محمد وجيه*

ملخص البحث

يعرف جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص الذى يمثل الحالة غير الماصة محل الدراسة بالنموذج الذى يتضمن حالتين غير ماصتين وحالة ماصة واحدة، كجدول حياة متناقص تحسب مدخلاته فى ضوء سلوك سكان الحالة بأفواجه المختلفة والملتحقات بالحالة من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية. ولكن يصف جدول الحياة المتناقص حركة الخروج فقط بين سكان الحالة خلال الفئات العمرية المتتالية، ولا يأخذ توقع الحياة بهذا الجدول حركة إعادة الدخول للمفردات للحالة غير الماصة محل الدراسة بالفئات العمرية المتتالية. ويقترح البحث وصف حركة الدخول وإعادة الدخول للحالة غير الماصة محل الدراسة من خلال تكوين جداول تمثل سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية، يتضمن كلٍ منها احتمال الالتحاق بالحالة من الدرجة محل التحليل بالإضافة للاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة بالنموذج بكل فئة عمرية. ولقد تم تعريف صورة عامة لاحتمال الالتحاق بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية. كما يقترح البحث تعديل توقع الحياة ليأخذ فى الاعتبار حركة إعادة الدخول للمفردات للحالة غير الماصة محل الدراسة بالفئات العمرية المتتالية. ولحساب توقع الحياة المعدل عند عمر معين بالحالة غير الماصة محل الدراسة، أضيف إلى توقع الحياة المحسوب من جدول الحياة المتناقص، متوسط عدد سنوات الحياة بعد هذا العمر بالحالة غير الماصة محل الدراسة للمفردات عند هذا العمر التى تنتقل من هذه الحالة غير الماصة إلى الحالة غير الماصة الأخرى خلال أى فئة عمرية بعد العمر محل التحليل، سواء عادت للحالة غير الماصة محل الدراسة خلال نفس الفئة العمرية أو عادت إليها خلال الفئات العمرية التالية لها. ولقد تم تطبيق المفاهيم السابقة من خلال تكوين جدول حياة فوجى للحالة متزوج فى ضوء البيانات التى قدمها وجيه (٢٠٠٣).

أهداف البحث

يستهدف البحث معالجة عيوب جدول الحياة الفوجى المقترح للتزايد والتناقص وجيه (١٩٨٩):

١- وصف حركة الدخول وإعادة الدخول للحالة غير الماصة محل الدراسة، إذ يتعرض جدول الحياة الفوجى المقترح للتزايد والتناقص لوصف حركة الخروج فقط بين مفردات كل فوج من أفواج سكان الحالة غير الماصة محل الدراسة بكل فئة عمرية.

٢- تعديل توقع الحياة بحيث يأخذ فى الاعتبار حركة إعادة الدخول للحالة غير الماصة محل الدراسة، لأنه يأخذ فى الاعتبار فقط حركة الخروج منها.

---

* أستاذ مساعد بقسم الإحصاء ــ كلية الاقتصاد والعلوم السياسية

١- مقدمة

لقد تعرض وجيه (١٩٨٩) لبناء جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص فى ظل افتراض تطابق خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية. ففى نموذج يتضمن حالتين غير ماصتين a وb وحالة ماصة r، وفى ضوء المفهوم الذى قدمه وجيه (١٩٨٩)، تعرف جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص بدلالة جدول حياة متناقص للحالة غير الماصة a وجدول حياة متناقص للحالة غير الماصة b، حيث يتم بناء جدول الحياة المتناقص للحالة غير الماصة محل الدراسة فى ضوء تجربة سكان الحالة والملتحقات بها بكل فئة عمرية.

وتصف دوال جدول الحياة المتناقص الفوجى حركة الخروج من الحالة غير الماصة محل الدراسة لكل فوج من سكان الحالة خلال الفئات العمرية المتتالية فى ظل افتراض تطابق سلوك مفردات الأفواج المختلفة بين سكان الحالة. أما حركة الدخول وإعادة الدخول للحالة غير الماصة محل الدراسة فلا يتعرض جدول الحياة المتناقص لوصفها، كما أن توقع الحياة عند عمر معين لا يأخذ فى الاعتبار إمكانية عودة دخول المفردات للحالة غير الماصة محل الدراسة، وإنما يأخذ فى الاعتبار حركة الخروج فقط.

ويقترح البحث لوصف حركة الدخول وإعادة الدخول للحالة غير الماصة محل الدراسة، أن يتم تكوين جداول تصف سلوك الملتحقات من الدرجات المتتالية بالحالة غير الماصة محل الدراسة بالفئات العمرية المتتالية، بحيث يتضمن كل جدول احتمال الالتحاق بالحالة غير الماصة محل الدراسة من الدرجة محل التحليل بالإضافة لمجموعة من الاحتمالات تصف سلوك الملتحقات بالحالة بكل فئة عمرية. ولقد أضاف وجيه (٢٠٠٣) لجدول الحياة الحالى للتزايد والتناقص المقترح عدداً من الأعمدة تصف سلوك الملتحقات بالحالة محل التحليل من الدرجة الأولى، ولكن لا تتضمن احتمال الالتحاق بها من الدرجة الأولى.

كما يتعرض البحث لتعديل توقع الحياة عند عمر معين، بحيث يأخذ فى الاعتبار عدد سنوات الحياة بالحالة غير الماصة محل الدراسة بعد هذا العمر سواء للمفردات عند هذا العمر التى تخرج منها خلال أى فئة عمرية بعد هذا العمر وتعود للدخول إليها خلال نفس الفئة العمرية، أو للمفردات عند هذا العمر التى تخرج منها خلال أى فئة عمرية بعد هذا العمر وتعود للدخول إليها خلال الفئات العمرية التالية لها.

وسوف نهتم بتوضيح مفهوم جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص ووصف حركة الدخول وإعادة الدخول للحالة غير الماصة محل الدراسة. كما سنهتم بتعريف الصيغة المعدلة لتوقع الحياة بجداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة. ثم من خلال

مثال تطبيقى، سوف نهتم ببناء جدول الحياة الفوجى الأكثر تطوراً عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة.

٢- مفهوم جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص

جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص هى جداول حياة يتم بناؤها فى ضوء ما هو متوفر من بيانات فوجية. ففى نموذج يتضمن الحالتين غير الماصتين a و b والحالة الماصة r، تتضمن البيانات الفوجية التى تستخدم فى بناء جداول الحياة للتزايد والتناقص للحالة a وللحالة b، بيانات تصف سلوك مفردات الفوج محل التحليل بالحالة a وبالحالة b بين الحالات a و b و r خلال الفئات العمرية المتتالية؛ وتظهر هذه البيانات فى شكل جدول خاص بالحالة a وجدول خاص بالحالة b.

وعندما تتوفر بيانات فوجية كاملة، يمكن أن نميز بالبيانات الخاصة بكل فئة عمرية بالحالة a وبالحالة b؛ كما يتضح بالجدول (١) والجدول (٢)، بين سكان الحالة محل التحليل وبين الملتحقات بها من الدرجات المتتالية: فسكان الحالة a، على سبيل المثال، بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) هى المفردات التى تتم العمر x_n بالحالة a، والملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة a خلال (x_n, x_{n+1}) هى المفردات التى تنتقل إلى الحالة a من بين سكان الحالة b خلال هذه الفئة العمرية، والملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة a خلال (x_n, x_{n+1}) هى المفردات التى تنتقل إلى الحالة a من بين الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة b خلال هذه الفئة العمرية وهكذا ...، فتعرف الملتحقات من الدرجة J بالحالة a خلال (x_n, x_{n+1}) بأنها المفردات التى تنتقل إلى الحالة a من بين الملتحقات من الدرجة $J-1$ بالحالة b خلال هذه الفئة العمرية.

وجدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص الذى يمثل الحالة غير الماصة محل التحليل هو جدول حياة متناقص يصف سلوك سكان الحالة محل التحليل بالفئات العمرية المتتالية. فيتضمن جدول الحياة الذى يمثل الحالة a، على سبيل المثال، الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}): ${}^{*}{}_{h_n}^{ao}P_{x_n}$؛ احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+1}، و ${}_{h_n}^{ao}P_{x_n}^{b}$؛ احتمال الانتقال للحالة b، و ${}_{h_n}^{ao}Q_{x_n}^{r}$؛ احتمال الانتقال للحالة r. ويتضمن عدد الباقين على قيد الحياة عند العمر x_n؛ ${}^{a}l(x_n)$، وعدد المفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b أو الحالة r خلال (x_n, x_{n+1})؛ ${}_{h_n}^{a}d_{x_n}^{b}$ و ${}_{h_n}^{a}d_{x_n}^{r}$ على التوالى، بالإضافة لعدد سنوات الحياة بكل فئة عمرية؛ ${}_{h_n}^{a}L_{x_n}$، وتوقع الحياة عند العمر x_n؛ ${}^{a}e(x_n)$.

---

* $h_n = x_{n+1} - x_n$

ولكن يتكون سكان الحالة غير الماصة محل التحليل بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) ذات الترتيب n، بما هو متوفر من بيانات، من عدد من الأفواج: فتتضمن المفردات سكان الحالة مفردات الفوج الصفرى؛ وهى مفردات الفوج محل التحليل بالحالة غير الماصة محل الدراسة التى لم تتعرض للخروج منها حتى العمر x_n. وتتضمن المفردات سكان الحالة مفردات الفوج الأول؛ وهى عبارة عن الملتحقات بالحالة محل التحليل خلال الفئة العمرية (x_1, x_2) التى تستمر فى الظهور بها حتى تتم العمر x_n. كما تتضمن المفردات سكان الحالة مفردات الفوج الثانى، وهى عبارة عن الملتحقات بالحالة محل التحليل خلال الفئة العمرية الثانية (x_2, x_3) التى تستمر فى الظهور بها حتى تتم العمر x_n، وهكذا ... حتى تتضمن المفردات سكان الحالة محل التحليل مفردات الفوج $(n-1)$؛ وهن عبارة عن الملتحقات بالحالة محل التحليل بالفئة العمرية $(n-1)$ التى تستمر فى الظهور بها حتى تتم العمر x_n. فإذا أخذنا فى الاعتبار الأفواج المختلفة التى يتكون منها المفردات سكان الحالة، يمكن أن نلاحظ أن جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص الذى يمثل الحالة غير الماصة محل التحليل هو جدول حياة متناقص يصف حركة خروج مفردات كل فوج من الأفواج من سكان الحالة بالفئات العمرية المتتالية فى ظل افتراض تطابق سلوك مفردات الأفواج المختلفة. ويتم حساب مدخلات جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص فى ضوء سلوك مفردات كل الأفواج المشاهدة بين سكان الحالة بكل فئة عمرية، فهذه المدخلات تمثل السلوك المتوسط لكل الأفواج. أما حركة الدخول أو إعادة الدخول للحالة غير الماصة محل التحليل فيمكن وصفها بدلالة سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى مع احتمال الالتحاق من الدرجة الأولى وسلوك الملتحقات من الدرجة الثانية مع احتمال الالتحاق من الدرجة الثانية وهكذا ... .

ويختلف جدول الحياة الفوجى المقترح للتزايد والتناقص عن جداول الحياة الحالية للتزايد والتناقص. فجدول الحياة الحالى للتزايد والتناقص ليس بجدول حياة؛ فدالة البقاء على قيد الحياة $l(x_n)$ ليست دالة متناقصة، وهو لا يميز بكل فئة عمرية بين سكان الحالة والملتحقات بالحالة من الدرجات المتتالية، ويأخذ حركة الدخول للحالة محل التحليل بكل فئة عمرية (x_n, x_{n+1}) فى الاعتبار، وذلك من خلال التمييز بين الحالة التى تظهر بها المفردات عند العمر x_n والحالة التى تظهر بها المفردات عند العمر x_{n+1}؛ فتتم إضافة المفردات التى تنتقل للحالة محل التحليل خلال الفئة (x_n, x_{n+1}) إلى $l(x_n)$، ويتم طرح المفردات التى تنتقل من الحالة محل التحليل خلال الفئة (x_n, x_{n+1}) من $l(x_n)$ وذلك للحصول على $l(x_{n+1})$؛ Preston et al (2001). أما حركة إعادة الدخول للحالة محل التحليل خلال نفس الفئة العمرية فلا يمكن تعريفها فى ظل الطريقة التى يتم التمييز بها بين المفردات. ويعرف جدول الحياة الحالى للتزايد والتناقص توقع الحياة بالحالة محل التحليل عند عمر معين لجميع المفردات

الباقية على قيد الحياة عند هذا العمر مهما كانت الحالة التى تنتمى إليها؛ ويأخذ توقع الحياة بهذا الجدول فى الاعتبار؛ Willekens et al (1982)، عدد سنوات الحياة بالحالة محل التحليل للمفردات التى تنتقل إليها خلال الفئة (x_n, x_{n+1})، وعدد سنوات الحياة بالحالة محل التحليل للمفردات التى تظهر بها عند العمر x_n. أما توقع الحياة بجدول الحياة الفوجى المقترح فلا يأخذ فى الاعتبار سوى عدد سنوات الحياة للمفردات التى تظهر بالحالة محل التحليل عند العمر x_n، فكان من الضرورى تطوير هذا المقياس ليأخذ فى الاعتبار حركة إعادة دخول المفردات للحالة محل التحليل خلال الفئات العمرية المتتالية.

جدول (١)

توزيع المفردات المشاهدة بالحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

وفقاً لسلوكهن بهذه الفئة العمرية

نوع المفردات المشاهدة بالحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	إجمالى عدد المفردات المشاهدة بالحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b خلال (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة r خلال (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات التى تستمر فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+1}
سكان الحالة a	${}^{ao}T_{x_n}$	${}^{*}{}^{ao}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{ao}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{ao}S_{x_{n+1}}$
ملتحقات بالحالة a من الدرجة الأولى	${}^{ai1}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{ai1}S_{x_{n+1}}$
ملتحقات بالحالة a من الدرجة الثانية	${}^{ai2}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{ai2}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{ai2}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{ai2}S_{x_{n+1}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ملتحقات بالحالة a من الدرجة J	${}^{aiJ}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{aiJ}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{aiJ}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{aiJ}S_{x_{n+1}}$

* $h_n = x_{n+1} - x_n$

جدول (٢)

توزيع المفردات المشاهدة بالحالة b بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

وفقاً لسلوكهن بهذه الفئة العمرية

نوع المفردات المشاهدة بالحالة b بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	إجمالى عدد المفردات المشاهدة بالحالة b بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات التى تنتقل من الحالة b إلى الحالة a خلال (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات التى تنتقل من الحالة b إلى الحالة r خلال (x_n, x_{n+1})	عدد المفردات التى تستمر فى الظهور بالحالة b حتى العمر x_{n+1}
سكان الحالة b	${}^{bo}T_{x_n}$	${}^{*}{}^{bo}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bo}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{bo}S_{x_{n+1}}$
ملتحقات بالحالة b من الدرجة الأولى	${}^{bi1}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{bi1}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bi1}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{bi1}S_{x_{n+1}}$
ملتحقات بالحالة b من الدرجة الثانية	${}^{bi2}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{bi2}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bi2}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{bi2}S_{x_{n+1}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ملتحقات بالحالة b من الدرجة J	${}^{biJ}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{biJ}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{biJ}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{biJ}S_{x_{n+1}}$

* $h_n = x_{n+1} - x_n$

٣- وصف حركة الدخول وحركة إعادة الدخول للحالة غير الماصة محل الدراسة بجداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص

فى نموذج يتضمن الحالتين غير الماصتين a وb والحالة الماصة r، يصف جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص الذى يمثل الحالة a حركة الخروج من الحالة a بين سكان الحالة بالفئات العمرية المتتالية كما سبق وأشرنا. ويمكن وصف حركة الدخول وحركة إعادة الدخول للحالة a بالفئات العمرية المتتالية عن طريق تكوين جداول تصف سلوك الملتحقات بالحالة a من الدرجات المتتالية بالفئات العمرية المتتالية.

فيمكن تكوين جدول يصف سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة a، يمدنا باحتمال الالتحاق من الدرجة الأولى بالحالة a بكل فئة عمرية (x_n, x_{n+1})، بالإضافة لاحتمال استمرار ظهور هذه المفردات بالحالة a حتى العمر x_{n+1}، واحتمال انتقالها للحالة b أو للحالة r قبل

العمر x_{n+1}: فاحتمال الالتحاق من الدرجة الأولى بالحالة a بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) هو احتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة a بين سكان الحالة b خلال (x_n, x_{n+1}). أما الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى خلال (x_n, x_{n+1})، فقد عرفها وجيه (٢٠٠٤) فى ظل افتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية وافتراض وجود علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية؛ حيث تعتبر حالة تطابق تأثير المخاطر محل الدراسة على سكان الحالة وعلى الملتحقات بها بكل فئة عمرية حالة خاصة منها. ولقد أضاف وجيه (٢٠٠٣) سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى لجدول الحياة الحالى للتزايد والتناقص لوصف حركة الدخول للحالة غير الماصة محل الدراسة؛ وذلك بدون تعريف احتمال الالتحاق من الدرجة الأولى بالحالة محل التحليل.

ويمكن تكوين جدول يصف سلوك الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة a بالفئات العمرية المتتالية، يمدنا باحتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة الثانية خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})، بالإضافة لاحتمال استمرار ظهور هذه المفردات بالحالة a حتى العمر x_{n+1} واحتمال انتقالها للحالة b أو للحالة r قبل العمر x_{n+1}. فاحتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة الثانية هو عبارة عن حاصل ضرب احتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة b بين سكان الحالة a واحتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة a بين الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة b. أما الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات من الدرجة الثانية بكل فئة عمرية فقد عرفها أيضاً وجيه (٢٠٠٤) فى ظل الفروض السابق الإشارة إليها.

وبصفة عامة يمكن تكوين جدول يصف سلوك الملتحقات من الدرجة 2J أو من الدرجة $(2J+1)$ بالحالة a فى ضوء نتائج البحث الذى قدمه وجيه (٢٠٠٤)، بحيث يعرف احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة 2J؛ $J = 1,2\ldots$ خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) بأنه عبارة عن حاصل ضرب احتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة b بين سكان الحالة a واحتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة a بين الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة b واحتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة b بين الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة a وهكذا ... حتى احتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة a بين الملتحقات من الدرجة $(2J-1)$ بالحالة b. ويعرف احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة $(2J+1)$؛ $J = 0,1,2\ldots$، خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) بأنه عبارة عن حاصل ضرب احتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة a بين سكان الحالة b واحتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة b بين الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة a واحتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة a بين الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة b

وهكذا ... حتى احتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة a بين الملتحقات من الدرجة 2J بالحالة b.

فإذا أخذنا فى الاعتبار الرموز المستخدمة للاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة a والملتحقات بها من الدرجات المتتالية، والرموز المستخدمة للاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة b والملتحقات بها من الدرجات المتتالية، كما يتضح بالجدولين (٣) و(٤) على التوالى، يمكن إعادة صياغة احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة 2J خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})؛ ${}^{ai(2J)}_{h_n}V_{x_n}$ ، $J = 1,2\ldots$، واحتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة $(2J+1)$ خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})؛ ${}^{ai(2J+1)}_{h_n}V_{x_n}$ ، $J = 0,1,2\ldots$، كالآتى:

$$ {}^{ai(2J)}_{h_n}V_{x_n} = {}^{ao}_{h_n}P^{b}_{x_n} \prod_{c=0}^{J-1} {}^{bi(2c+1)}_{h_n}P^{a}_{x_n} \prod_{c=1}^{J-1} {}^{ai(2c)}_{h_n}P^{b}_{x_n} \quad , J = 1,2\ldots $$

$$ {}^{ai(2J+1)}_{h_n}V_{x_n} = {}^{bo}_{h_n}P^{a}_{x_n} \prod_{c=0}^{J-1} {}^{ai(2c+1)}_{h_n}P^{b}_{x_n} \prod_{c=1}^{J} {}^{bi(2c)}_{h_n}P^{a}_{x_n} \quad , J = 0,1,2\ldots $$

جدول (٣)

الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة a والملتحقات بها من الدرجات المتتالية خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

نوع الاحتمال / نوع المفردات المشاهدة بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+1}	احتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة b خلال (x_n, x_{n+1})	احتمال الانتقال من الحالة a إلى الحالة r خلال (x_n, x_{n+1})
سكان الحالة a	${}^{*\ ao}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{ao}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{ao}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة الأولى	${}^{ai1}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{ai1}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
الملتحقات بالحالة a من الدرجة الثانية	${}^{ai2}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{ai2}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{ai2}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
⋮	⋮	⋮	⋮
الملتحقات بالحالة a من الدرجة J	${}^{aiJ}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{aiJ}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{aiJ}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$

* $h_n = x_{n+1} - x_n$

جدول (٤)

الاحتمالات التى تصف سلوك سكان الحالة b والملتحقات

بها من الدرجات المتتالية خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})

نوع الاحتمال / نوع المفردات المشاهدة بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1})	احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة b حتى العمر x_{n+1}	احتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة a خلال (x_n, x_{n+1})	احتمال الانتقال من الحالة b إلى الحالة r خلال (x_n, x_{n+1})
سكان الحالة b	${}^{*}{}_{h_n}^{bo}P_{x_n}$	${}_{h_n}^{bo}P_{x_n}^{a}$	${}_{h_n}^{bo}Q_{x_n}^{r}$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة الأولى	${}_{h_n}^{bi1}P_{x_n}$	${}_{h_n}^{bi1}P_{x_n}^{a}$	${}_{h_n}^{bi1}Q_{x_n}^{r}$
الملتحقات بالحالة b من الدرجة الثانية	${}_{h_n}^{bi2}P_{x_n}$	${}_{h_n}^{bi2}P_{x_n}^{a}$	${}_{h_n}^{bi2}Q_{x_n}^{r}$
⋮	⋮	⋮	⋮
الملتحقات بالحالة b من الدرجة J	${}_{h_n}^{biJ}P_{x_n}$	${}_{h_n}^{biJ}P_{x_n}^{a}$	${}_{h_n}^{biJ}Q_{x_n}^{r}$

* $h_n = x_{n+1} - x_n$

بالمثل يمكن وصف حركة الدخول وإعادة الدخول للحالة b باستخدام جداول تصف سلوك الملتحقات بها من الدرجة 2J؛ $J = 1,2\ldots$، ومن الدرجة $(2J+1)$؛ $J = 0,1,2\ldots$، تتضمن احتمال الالتحاق بالحالة b من الدرجات المتتالية وتتضمن سلوك الملتحقات بها من الدرجات المتتالية.

ويمكن صياغة احتمال الالتحاق بالحالة b من الدرجة 2J خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})؛ ${}_{h_n}^{bi(2J)}V_{x_n}$، $J = 1,2\ldots$، واحتمال الالتحاق بالحالة b من الدرجة $(2J+1)$ خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1})؛ ${}_{h_n}^{bi(2J+1)}V_{x_n}$، $J = 0,1,2\ldots$، بعد تعريف سلوك الملتحقات بالحالة b من الدرجات المتتالية فى ضوء نتائج البحث الذى قدمه وجيه (٢٠٠٤)، كالآتى:

$$ {}_{h_n}^{bi(2J)}V_{x_n} = {}_{h_n}^{bo}P_{x_n}^{a} \prod_{c=0}^{J-1} {}_{h_n}^{ai(2c+1)}P_{x_n}^{b} \prod_{c=1}^{J-1} {}_{h_n}^{bi(2c)}P_{x_n}^{a} \quad , J = 1,2\ldots $$

$$ {}_{h_n}^{bi(2J+1)}V_{x_n} = {}_{h_n}^{ao}P_{x_n}^{b} \prod_{c=0}^{J-1} {}_{h_n}^{bi(2c+1)}P_{x_n}^{a} \prod_{c=1}^{J} {}_{h_n}^{ai(2c)}P_{x_n}^{b} \quad , J = 0,1,2\ldots $$

٤- تعديل توقع الحياة بجداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة

فى نموذج يتضمن الحالتين غير الماصتين a وb والحالة الماصة r، يعرف توقع الحياة عند العمر x_n بجدول الحياة الفوجى المقترح للتزايد والتناقص الذى يمثل الحالة a؛ ${}^{a}e(x_n)$ عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة كالآتى:

$e^{a}(x_n) = \frac{\text{عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر } x_n}{{}^{a}l(x_n)}$، فتوقع الحياة هذا يأخذ فى الاعتبار حركة الخروج فقط بين مفردات كل فوج من أفواج سكان الحالة بالفئة العمرية (x_n, x_{n+1}). ولكى نأخذ حركة إعادة الدخول للحالة غير الماصة محل التحليل عند حساب توقع الحياة، لابد وأن نضيف لعدد سنوات الحياة بعد العمر x_n للـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة بالحالة a بجدول الحياة المتناقص، عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال نفس الفئة العمرية. كما يجب أن نضيف عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية لها. فالمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) يمكن أن تعود للدخول للحالة a خلال نفس الفئة العمرية، وذلك فى شكل ملتحقات بالحالة a من الدرجة $2J$ ؛ $J = 1, 2 \ldots$، أى ملتحقات من الدرجة الثانية والرابعة وهكذا ... . والمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) يمكن أن تعود للدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية لها وذلك بعد أن تصبح من بين سكان الحالة b، فتتم العمر x_{n+1} بالحالة b.

وبالتالى يعرف توقع الحياة المعدل عند العمر x_n للـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة بالحالة a؛ $eA(x_n)$ كالآتى:

$eA(x_n) =$ عدد سنوات الحياة للـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة بعد العمر x_n بجدول الحياة المتناقص الذى يمثل الحالة a + عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال نفس الفئة العمرية + عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية لها

${}^{a}l(x_n)$

$+{}^{a}e(x_n) = eA(x_n)$ عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال نفس الفئة العمرية + عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية لها

${}^{a}l(x_n)$

ويمكن إعادة صياغة $eA(x_n)$ كالآتى:

$$eA(x_n) = {}^{a}e(x_n) + e_1A(x_n) + e_2A(x_n).$$

حيث تعرف $e_1A(x_n)$ و $e_2A(x_n)$ كالآتى:

$= e_1A(x_n)$ عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال نفس الفئة العمرية

${}^{a}l(x_n)$

$= e_2A(x_n)$ عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية لها

${}^{a}l(x_n)$

وسوف نهتم فيما يلى بتعريف طريقة حساب $e_1A(x_n)$ و $e_2A(x_n)$.

١/٤- تعريف ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل بالحالة a الذى يعزى للمفردات التى تعود للدخول إليها خلال نفس الفئة العمرية التى خرجت خلالها

يلاحظ أن عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال نفس الفئة العمرية = عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للملتحقات بالحالة a من الدرجات المتتالية $2J$ ؛ $J = 1, 2 \ldots$ ، بجميع الفئات العمرية التى تلى العمر

x_n = $\sum_{J=1}^{*}$ $\sum_{y=0}$ ** عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للملتحقات بالحالة a من الدرجة 2J بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}).

ولكن عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للملتحقات بالحالة a من الدرجة 2J بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) = عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمستمرات فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+y+1} بين الملتحقات بها من الدرجة 2J بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) + عدد سنوات الحياة بالحالة a بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) للخارجات من الحالة a قبل العمر x_{n+y+1} بين الملتحقات بها من الدرجة 2J بهذه الفئة العمرية = متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمستمرات فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+y+1} بين الملتحقات بها من الدرجة 2J بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) × عدد المستمرات فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+y+1} بين الملتحقات بها من الدرجة 2J بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) + متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) للخارجات من الحالة a قبل العمر x_{n+y+1} بين الملتحقات بها من الدرجة 2J بهذه الفئة العمرية × عدد الخارجات من الحالة a قبل العمر x_{n+y+1} بين الملتحقات بها من الدرجة 2J بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}).

فإذا أخذنا فى الاعتبار، أنه فى ظل افتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية، أثبت وجيه (٢٠٠٤) انتظام سلوك الملتحقات بالحالات غير الماصة من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية، وذلك عندما تكون هناك علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية؛ حيث تعتبر حالة تطابق تأثير المخاطر محل الدراسة على سكان الحالة وعلى الملتحقات بها بكل فئة عمرية حالة خاصة منها، يمكن تعريف متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a لكل نوع من المفردات كالآتى:

أ- متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمستمرات فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+y+1} بين الملتحقات بها من الدرجة 2J بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) = $e\,A(x_{n+y+1}) + \frac{h^{***}_{n+y}}{2^{2J}}$.

---

* الحد الأعلى يتحدد وفقاً لآخر فئة عمرية بجدول البيانات الخاص بالحالة a ووفقاً لقيمة n

** يتحدد الحد الأعلى فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن الملتحقات بالحالة a من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية

*** $h_{n+y} = x_{n+y+1} - x_{n+y}$

فالملتحقات بالحالة a من الدرجة 2J بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1})؛ المستمرات فى الظهور بها حتى العمر x_{n+y+1}، تعيش كلٍ منهن فى المتوسط بالحالة a خلال هذه الفئة العمرية $\frac{h_{n+y}}{2^{2J}}$ سنة، ثم يتممن العمر x_{n+y+1} بالحالة a، فتعيش كلٍ منهن فى المتوسط بعد هذا العمر بالحالة a $eA(x_{n+y+1})$ سنة وذلك مع أخذ حركة الخروج وإعادة الدخول للحالة a لهذه المفردات فى الاعتبار.

ب- متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) للخارجات من الحالة a قبل العمر x_{n+y+1} بين الملتحقات بها من الدرجة 2J بهذه الفئة العمرية = $\frac{h_{n+y}}{2^{2J+1}}$ سنة.

فالملتحقات بالحالة a من الدرجة 2J بالفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) الخارجات منها قبل العمر x_{n+y+1} تعيش كلٍ منهن فى المتوسط بالحالة a خلال هذه الفئة العمرية $\frac{h_{n+y}}{2^{2J+1}}$ سنة ثم تخرج من الحالة a.

وبالتالى يمكن صياغة $e_1A(x_n)$، ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند العمر x_n الذى يعزى للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $^aI(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال نفس الفئة العمرية كالآتى:

$$e_1A(x_n) = \sum_{J=I}^{\infty^*}\sum_{y=0}^{\infty^*}\left[\frac{\text{عدد المستمرات فى الظهور بالحالة a حتى العمر } x_{n+y+1} \text{ بين الملتحقات بها من الدرجة 2J خلال الفئة العمرية } (x_{n+y}, x_{n+y+1})}{^aI(x_n)} \times \left(eA(x_{n+y+1}) + \frac{h_{n+y}}{2^{2J}}\right)\right] \cdot \left[\frac{\text{عدد الخارجات من الحالة a قبل العمر } x_{n+y+1} \text{ بين الملتحقات بها من الدرجة 2J خلال الفئة العمرية } (x_{n+y}, x_{n+y+1})}{^aI(x_n)} \times \frac{h_{n+y}}{2^{2J+1}}\right] +$$

فإذا أخذنا فى الاعتبار أن عدد الملتحقات بالحالة a من الدرجة 2J خلال الفئة العمرية $(x_{n+y}, x_{n+y+1}) = {}^aI(x_{n+y})$ × احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة 2J خلال الفئة العمرية $(x_{n+y}, x_{n+y+1}) = {}^aI(x_{n+y}) \cdot {}^{aj(2J)}_{h_{n+y}}V_{x_{n+y}}$.

* سبق تحديد الحد الأعلى لها

وإذا أخذنا فى الاعتبار أن احتمال استمرار ظهور هذه المفـردات بالحالـة a حتـى العمـر x_{n+y+1} ، $_{h_{n+y}}^{ai(2J)}P_{x_{n+y}}$ ، يمكن إعادة صياغة $e_1A(x_n)$ كالآتى:

$$e_1A(x_n)=\sum_{y=0}^{*}\sum_{J=1}^{*}\frac{{}^{a}l(x_{n+y})}{{}^{a}l(x_n)}\,{}_{h_{n+y}}^{ai(2J)}V_{x_{n+y}}\left[{}_{h_{n+y}}^{ai(2J)}P_{x_{n+y}}\left(\frac{h_{n+y}}{2^{2J}}+e\,A(x_{n+y+1})\right)+\left(1-{}_{h_{n+y}}^{ai(2J)}P_{x_{n+y}}\right)\frac{h_{n+y}}{2^{2J+1}}\right]$$

٤/٢- تعريف ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل بالحالة a الذى يعزى للمفردات التى تعود للدخول إليها خلال الفئات العمرية التالية للفئة العمرية التى خرجت خلالها

يلاحظ أن عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للـدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية لها = $\sum_{y=1}$ ** عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1},x_{n+y})، وتعود للدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية للفئة العمرية السـابقة = $\sum_{y=1}$ * $\sum_{z=y}$ ** عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالـة a إلى الحالة b من بين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1},x_{n+y})، وتعود للـدخول للحالة a بالفئة العمرية التالية (x_{n+z},x_{n+z+1}) = $\sum_{y=1}$ * $\sum_{z=y}$ *عدد سنوات الحياة بالحالـة a بعـد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خـلال الفئة العمرية (x_{n+y-1},x_{n+y})، وتعود للدخول للحالة a بالفئة العمرية التالية (x_{n+z},x_{n+z+1})، ثم تستمر فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+z+1} + $\sum_{y=1}$ * $\sum_{z=y}$ * عدد سنوات الحيـاة بالحالـة a بالفئة العمرية (x_{n+z},x_{n+z+1}) للمفردات التى تنتقل من الحالـة a إلـى الحالـة b مـن بـين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1},x_{n+y})، وتعود للدخول للحالة a بالفئة العمرية التالية (x_{n+z},x_{n+z+1})، ثم تخرج من الحالة a قبل العمـر x_{n+z+1} = $\sum_{y=1}$ * $\sum_{z=y}$ * $\sum_{u=0}$ *** عـدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين

---

* سبق تحديد الحد الأعلى لها

** يتحدد الحد الأعلى وفقاً لآخر فئة عمرية بجدول البيانات الخاص بالحالة a ووفقاً لقيمة n

*** يتحدد الحد الأعلى فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن الملتحقات بالحالة a من الـدرجات المتتاليـة خلال كل فئة عمرية

الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1}, x_{n+y})، وتظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y}، كما تظهر بالحالة b عند العمر التالى x_{n+z}، ثم تنتقل إلى الحالة a كملتحقات من الدرجة $(2u+1)$ خلال الفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1})، وتستمر فى الظهور بالحالة a حتى العمر $x_{n+z+1} + \text{مـ}^{*}_{u=0} \text{مـ}^{*}_{z=y} \text{مـ}^{*}_{y=1}$ عدد سنوات الحياة بالحالة a بالفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1}) للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1}, x_{n+y})، وتظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y}، كما تظهر بالحالة b عند العمر التالى x_{n+z}، ثم تنتقل إلى الحالة a كملتحقات من الدرجة $(2u+1)$ خلال الفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1})، وتخرج من الحالة a قبل العمر x_{n+z+1}.

ويمكن تعريف عدد سنوات الحياة للمجموعتين من المفردات فى ضوء نتائج البحث الذى قدمه وجيه (٢٠٠٤) كالآتى:

أ- عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1}, x_{n+y})، وتظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y}، كما تظهر بالحالة b عند العمر التالى x_{n+z}، ثم تنتقل إلى الحالة a كملتحقات من الدرجة $(2u+1)$ خلال الفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1})، وتستمر فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+z+1} = عدد المفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1}, x_{n+y})، وتظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y}، كما تظهر بالحالة b عند العمر التالى x_{n+z}، ثم تنتقل إلى الحالة a كملتحقات من الدرجة $(2u+1)$ خلال الفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1})، وتستمر فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+z+1} × متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n لهذه المفردات.

ويعرف متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a بعد العمر x_n لهذا النوع من المفردات بأنه يساوى $e\,A(x_{n+z+1}) + \frac{h_{n+z}}{2^{2u+1}}$.

ب- عدد سنوات الحياة بالحالة a بالفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1}) للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1}, x_{n+y})، وتظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y}، كما تظهر بالحالة b عند العمر التالى x_{n+z}، ثم تنتقل إلى الحالة a كملتحقات من الدرجة $(2u+1)$ خلال الفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1})، وتخرج من الحالة a قبل العمر x_{n+z+1} = عدد المفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $({}^{a}l(x_n))$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1}, x_{n+y}) وتظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y}، كما تظهر

* سبق تحديد الحد الأعلى لها

بالحالة b عند العمر التالى x_{n+z}، ثم تنتقل إلى الحالة a كملتحقات من الدرجة $(2u+1)$ خلال الفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1})، وتخرج من الحالة a قبل العمر x_{n+z+1} × متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a بالفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1}) لهذه المفردات.

ويعرف متوسط عدد سنوات الحياة بالحالة a بالفئة العمرية (x_{n+z}, x_{n+z+1}) لهذا النوع من المفردات بأنه يساوى $\frac{h_{n+z}}{2^{2u+2}}$.

فإذا أخذنا فى الاعتبار أن عدد المفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ $a_{l(x_n)}$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1}, x_{n+y}) وتظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y} هو: $a_{l(x_{n+y-1})} \times \sum_{J=0}^{*}$ [(احتمال الالتحاق بالحالة b من الدرجة $(2J+1)$ خلال الفئة العمرية (x_{n+y-1}, x_{n+y})) × (احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة b حتى العمر x_{n+y} بين الملتحقات بها من الدرجة $(2J+1)$)]؛ حيث $a_{l(x_{n+y-1})}$ هو عدد الباقين على قيد الحياة بالحالة a عند العمر x_{n+y-1}. واحتمال الالتحاق بالحالة b من الدرجة $(2J+1)$ خلال الفئة العمرية $(x_{n+y-1}, x_{n+y}) = {}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}V_{x_{n+y-1}}$. كذلك احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة b حتى العمر x_{n+y} بين الملتحقات بها من الدرجة $(2J+1)$ بالفئة العمرية $(x_{n+y-1}, x_{n+y}) = {}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}P_{x_{n+y-1}}$

وإذا أخذنا فى الاعتبار أن احتمال الظهور بالحالة b عند العمر x_{n+z} بين المفردات التى تظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y} من بين الـ $a_{l(x_n)}$ مفردة $= \prod_{s=y}^{z-1}\left[{}^{bo}_{h_{n+s}}P_{x_{n+s}} + \sum_{u=1}^{*} {}^{bi(2u)}_{h_{n+s}}V_{x_{n+s}} \; {}^{bi(2u)}_{h_{n+s}}P_{x_{n+s}}\right]$، حيث أن المفردات التى تظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y+1} من بين الـ $a_{l(x_n)}$ مفردة، هى المفردات التى تظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y} من بين الـ $a_{l(x_n)}$ مفردة وتستمر فى الظهور بالحالة b من العمر x_{n+y} إلى العمر x_{n+y+1}، أو تنتقل إلى الحالة a خلال الفئة العمرية (x_{n+y}, x_{n+y+1}) ثم تعود للدخول للحالة b كملتحقات من الدرجة $2u$؛ $u = 1, 2 \ldots$، خلال نفس الفئة العمرية وتستمر فى الظهور بالحالة b حتى العمر x_{n+y+1}. بالمثل المفردات التى تظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y+2} من بين الـ $a_{l(x_n)}$ مفردة، هى المفردات من بين الـ $a_{l(x_n)}$ مفردة التى تظهر بالحالة b عند العمر x_{n+y+1} وتستمر فى الظهور بالحالة b حتى العمر x_{n+y+2}، أو تنتقل للحالة a خلال الفئة العمرية (x_{n+y+1}, x_{n+y+2})، ثم تعود للدخول للحالة b كملتحقات من الدرجة $2u$؛ $u = 1, 2 \ldots$، خلال نفس الفئة العمرية وتستمر فى الظهور بالحالة b حتى العمر x_{n+y+2}. وهكذا تستمر

---

* يتحدد الحد الأعلى فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن الملتحقات بالحالة b من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية

الحركة بهذا الشكل خلال الفئات العمرية المتتالية حتى يتم تعريف المفردات من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة التى تظهر بالحالة b عند أى عمر تال.

كذلك إذا أخذنا فى الاعتبار أن احتمال انتقال المفردات السابقة إلى الحالة a كملتحقات بها من الدرجة $2u+1$ ؛ $u=0,1,2\ldots$ خلال الفئة العمرية $x_{n+z}=(x_{n+z},x_{n+z+1})$ ، ${}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}V_{x_{n+z}}$ ، وأن احتمال الاستمرار فى الظهور بالحالة a حتى العمر x_{n+z+1} بين الملتحقات بها من الدرجة $(2u+1)$ خلال الفئة العمرية (x_{n+z},x_{n+z+1}) ، ${}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}P_{x_{n+z}}$ ، يمكن صياغة ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند العمر x_n الذى يعزى للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b من بين الـ ${}^{a}l(x_n)$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية لها؛ $e_2A(x_n)$ كالآتى:

$$e_2A(x_n)=\sum_{y=1}^{*}\sum_{z=y}^{*}\frac{{}^{a}l(x_{n+y-1})}{{}^{a}l(x_n)}\left[\sum_{J=0}^{*}{}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}V_{x_{n+y-1}}\;{}^{bi(2J+1)}_{h_{n+y-1}}P_{x_{n+y-1}}\right]$$
$$\prod_{s=y}^{z-1}\left[{}^{bo}_{h_{n+s}}P_{x_{n+s}}+\sum_{u=1}^{*}{}^{bi(2u)}_{h_{n+s}}V_{x_{n+s}}\;{}^{bi(2u)}_{h_{n+s}}P_{x_{n+s}}\right]$$
$$\left[\sum_{u=0}^{*,*}{}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}V_{x_{n+z}}\left[{}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}P_{x_{n+z}}\left(\frac{h_{n+z}}{2^{2u+1}}+eA(x_{n+z+1})\right)+\left(1-{}^{ai(2u+1)}_{h_{n+z}}P_{x_{n+z}}\right)\frac{h_{n+z}}{2^{2u+2}}\right]\right]$$

٥- التطبيق

سوف نتعرض لبناء جدول حياة فوجى للتزايد والتناقص عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة، وتكون هناك علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية، وذلك باستخدام المثال الذى قدمه وجيه (٢٠٠٣) عن الحالة متزوج a والحالة غير متزوج b والحالة وفاة r جدول (٥) وجدول (٦) على التوالى، وباستخدام الأسلوب الذى قدمه وجيه (٢٠٠٣) لبناء جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص فى الحالة المشار إليها.

سوف يتم بناء جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص الذى يمثل الحالة a لوصف حركة الخروج من الحالة متزوج جدول (٧). وسوف يتم تكوين جدول يمثل سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة a، جدول (٨)، لوصف حركة الدخول للحالة متزوج. كذلك سوف يتم تكوين جدول يمثل سلوك الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة a، جدول (٩)، لوصف حركة

---

* سبق تحديد الحد الأعلى لها

** يتحدد الحد الأعلى فى ضوء ما هو متوفر من بيانات عن الملتحقات بالحالة a من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية

إعادة الدخول للحالة متزوج وذلك فى ظل افتراض استمرار ظهور الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة متزوج بهذه الحالة بكل فئة عمرية.

ويتضمن الجدول (٧) توقع الحياة المعدل، وكما يتضح بالجدول تتناقص الفروق بين توقع الحياة المعدل وتوقع الحياة مع تقدم العمر.

ولقد لوحظ فى ضوء ما هو متوفر من بيانات أن مساهمة ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند عمر معين الذى يعزى للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b خلال أى فئة عمرية بعد هذا العمر وتعود للدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية لها؛ $e_2A(x_n)$، بسيطة فهى تقل دائماً عن 1 كما يتضح بالجدول (١٠)، وتتناقص مع تقدم الفئات العمرية، وتقل كثيراً عن ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند عمر معين الذى يعزى للمفردات التى تنتقل من الحالة a إلى الحالة b خلال أى فئة عمرية بعد هذا العمر وتعود للدخول للحالة a خلال نفس الفئة العمرية؛ $e_1A(x_n)$.

جدول (٥)

وصف سلوك 1000 أنثى عند العمر 18 بالحالة متزوج a

وسلوك الملتحقات بها خلال الفئات العمرية المتتالية

x_n	${}^{ao}T_{x_n}$	${}^{ao}S_{x_{n+1}}$	${}^{ao}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{ao}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{ail}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{ail}S_{x_{n+1}}$	${}^{ail}_{h_n}D^{b}_{x_n}$	${}^{ail}_{h_n}D^{r}_{x_n}$
18 -	1000	982	15	3	50	33	14	3
20 -	1018	921	38	59	758	432	322	4
30 -	1374	1244	118	12	670	394	271	5
40 -	1700	1480	190	30	384	194	182	8
50 -	1752	1447	192	113	120	68	46	6
60 -	1571	101	932	538	12	1	6	5
85 +	182	0	0	182	0	0	0	0

جدول (٦)

وصف سلوك 2500 أنثى عند العمر 18 بالحالة غير متزوج b

وسلوك الملتحقات بها خلال الفئات العمرية المتتالية

x_n	${}^{bo}T_{x_n}$	${}^{bo}S_{x_{n+1}}$	${}^{bo}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bo}_{h_n}D^{r}_{x_n}$	${}^{bil}_{h_n}T_{x_n}$	${}^{bil}S_{x_{n+1}}$	${}^{bil}_{h_n}D^{a}_{x_n}$	${}^{bil}_{h_n}D^{r}_{x_n}$
18 -	2500	2438	50	12	15	10	3	2
20 -	2462	1640	758	64	38	16	21	1
30 -	1978	1217	670	91	118	48	62	8
40 -	1536	960	384	192	190	70	78	42
50 -	1212	729	120	363	192	74	56	62
60 -	849	302	12	535	932	206	81	645
85 +	514	0	0	514	0	0	0	0

جدول (٧)

جدول حياة للحالة متزوج a

x_n	${}^{ao}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{ao}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{ao}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$	${}^{a}l(x_n)$	${}^{a}_{h_n}d^{b}_{x_n}$	${}^{a}_{h_n}d^{r}_{x_n}$	${}^{a}_{h_n}L_{x_n}$	${}^{a}e(x_n)$	$eA(x_n)$
18 -	.982000	.014914	.003086	10000	149	31	18591	38.5	43.1
20 -	.904715	.081094	.014191	9820	796	139	93363	37.3	41.6
30 -	.905386	.90652	.003962	8884	805	35	84516	30.8	33.5
40 -	.870588	.117418	.011994	8044	945	96	75114	23.5	24.9
50 -	.825913	.116058	.058029	7003	813	406	63735	16.2	16.7
60 -	.064290	.592637	.343073	5784	3428	1948	49301	8.6	8.9
85+	0	0	0	372	0	372	606	1.6	1.6

جدول (٨)

وصف سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة متزوج a

خلال الفئات العمرية المتتالية

x_n	احتمال الالتحاق من الدرجة الأولى بالحالة a	سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة a		
		${}^{a1}_{h_n}P_{x_n}$	${}^{a1}_{h_n}P^{b}_{x_n}$	${}^{a1}_{h_n}Q^{r}_{x_n}$
18 -	.019618	.660001	.281708	.058291
20 -	.308162	.569920	.366027	.064053
30 -	.338898	.588060	.394690	.017250
40 -	.248922	.505207	.448935	.045858
50 -	.116703	.566668	.288889	.144443
60 -	.047069	.083333	.580576	.336091
85 +	0	-*	-	-

* - لا تنطبق

جدول (٩)

وصف سلوك الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة

متزوج a خلال الفئات العمرية المتتالية

x_n	احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة الثانية	سلوك الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة a
18 -	.003932	لقد تم افتراض استمرار ظهور الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة a بهذه الحالة بكل فئة عمرية
20 -	.043333	
30 -	.047370	
40 -	.049226	
50 -	.020888	
60 -	.033726	
85 +	0	

جدول (١٠)

الأجزاء المختلفة لتوقع الحياة المعدل عند عمر معين بالحالة a

x_n	${}^a e(x_n)$	$e_1 A(x_n)$	$e_2 A(x_n)$
18 -	38.5	3.929717	.636748
20 -	37.3	3.833176	.503458
30 -	30.8	2.512687	.196453
40 -	23.5	1.341600	.066820
50 -	16.2	0.455395	.014536
60 -	8.6	0.263063	0
85 +	1.6	0	0

٦- الخلاصة

يستهدف البحث تطوير تعريف جداول الحياة الفوجية للتزايد والتناقص التى تعرض لبنائها وجيه (١٩٨٩) فى ظل افتراض تطابق تأثير المخاطر محل الدراسة على سكان الحالة وعلى الملتحقات بها بكل فئة عمرية، وذلك سواء توفرت بيانات فوجية كاملة أو توفرت بيانات فوجية غير كاملة. ثم تعرض وجيه (٢٠٠٣) لبنائها بنموذج يتضمن حالتين غير ماصتين وحالة ماصة واحدة، فى ظل افتراض وجود علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية عندما تتوفر بيانات فوجية كاملة. فلقد عرف وجيه (١٩٨٩) ووجيه (٢٠٠٣) جدول الحياة الفوجى للتزايد والتناقص كجدول حياة متناقص يصف حركة خروج كل فوج من سكان الحالة من الحالة غير الماصة محل الدراسة. ويقترح البحث فى ظل نموذج يتضمن الحالتين غير الماصتين a و b والحالة الماصة r أن يضاف لجدول الحياة المتناقص الذى يمثل الحالة غير الماصة محل الدراسة a على سبيل المثال، جداول تمثل سلوك الملتحقات بها من الدرجات المتتالية، يتضمن كل منها احتمال الالتحاق بالحالة a من الدرجة محل التحليل بكل فئة عمرية واحتمال استمرار ظهور هذه المفردات بالحالة a حتى نهاية كل فئة عمرية واحتمال انتقالها للحالة b أو للحالة r بكل فئة عمرية، وذلك لوصف حركة الدخول وإعادة الدخول للحالة غير الماصة محل التحليل.

ولقد تم تعريف صورة عامة لاحتمال الالتحاق بالحالة غير الماصة محل التحليل من الدرجات المتتالية. أما الاحتمالات التى تصف سلوك الملتحقات بالحالة غير الماصة من الدرجات المتتالية فقد عرفها وجيه (٢٠٠٤) فى ظل افتراض وجود علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية وافتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية.

كما يقترح البحث فى ظل النموذج السابق تعديل توقع الحياة بجدول الحياة المتناقص، بحيث يأخذ فى الاعتبار حركة إعادة دخول المفردات للحالة غير الماصة محل التحليل بالفئات

العمرية المتتالية، فيتوفر بذلك معلومات، من جدول الحياة الفوجى المقترح للتزايد والتناقص، لا تقل أهمية عن تلك التى يوفرها جدول الحياة الحالى للتزايد والتناقص الشائع استخدامه.

فتوقع الحياة المعدل بالحالة **a** عند العمر x_n، يأخذ فى الاعتبار عدد سنوات الحياة بالحالة **a** بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة **a** إلى الحالة **b** من بين الـ $l(x_n)^a$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة **a** خلال نفس الفئة العمرية. ويأخذ فى الاعتبار عدد سنوات الحياة بالحالة **a** بعد العمر x_n للمفردات التى تنتقل من الحالة **a** إلى الحالة **b** من بين الـ $l(x_n)^a$ مفردة خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة **a** خلال الفئات العمرية التالية لها.

فالمفردات التى تنتقل من الحالة **a** إلى الحالة **b** من بين الـ $l(x_n)^a$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) وتعود للدخول للحالة **a** خلال نفس الفئة العمرية هى عبارة عن الملتحقات من الدرجة $2J$؛ $J = 1,2\ldots$، بالحالة **a** خلال هذه الفئة العمرية. والمفردات التى تنتقل من الحالة **a** إلى الحالة **b** من بين الـ $l(x_n)^a$ مفردة خلال الفئة العمرية (x_n, x_{n+1}) وتعود للدخول للحالة **a** خلال الفئات العمرية التالية لها هى عبارة عن الملتحقات بالحالة **a** من الدرجة $(2J+1)$؛ $J = 0,1,2\ldots$، بكل فئة عمرية تالية للفئة (x_n, x_{n+1}) بين الملتحقات بالحالة **b** من الدرجة $(2J+1)$؛ $J = 0,1,2\ldots$، خلال (x_n, x_{n+1}) المستمرات فى الظهور بالحالة **b** حتى العمر x_{n+1}.

ولقد أثبت وجيه (٢٠٠٤) انتظام سلوك الملتحقات بالحالات غير الماصة من الدرجات المتتالية بكل فئة عمرية فى ظل افتراض ثبات المخاطر محل الدراسة بكل فئة عمرية، عندما تكون هناك علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية.

ولقد تم تطبيق المفاهيم السابقة من خلال استخدام المثال الذى قدمه وجيه (٢٠٠٣) عن الحالة متزوج **a** والحالة غير متزوج **b** والحالة وفاة **r**. فتم تكوين جدول حياة فوجى للحالة متزوج **a**، وتم تكوين جدول يصف سلوك الملتحقات من الدرجة الأولى بالحالة **a**، وجدول يصف سلوك الملتحقات من الدرجة الثانية بالحالة **a**، وتم حساب توقع الحياة المعدل بالحالة متزوج **a**.

ولقد لوحظ فى ضوء ما هو متوفر من بيانات تناقص الفروق بين توقع الحياة المعدل وتوقع الحياة المحسوب من جدول الحياة المتناقص مع تقدم العمر. كما لوحظ أن مساهمة ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند العمر x_n الذى يعزى للمفردات التى تنتقل من الحالة **a** إلى الحالة **b** خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة **a** خلال نفس الفئة العمرية يزيد كثيراً عن ذلك الجزء من توقع الحياة المعدل عند العمر x_n الذى يعزى للمفردات التى تنتقل

من الحالة a إلى الحالة b خلال أى فئة عمرية بعد العمر x_n وتعود للدخول للحالة a خلال الفئات العمرية التالية لها.

References

1- Land; Kenneth C., Rogers; Andrei. 1982. Multidimensional mathematical demography. Academic Press.
2- Preston; Samuel H., Heuveline; Patrick, Guillot; Michel. 2001. Demography – measuring and modeling population processes. Blackwell Publishers Inc.
3- Willekens; F. J., Shah; I., Shah; J. M., Ramachandran; P. 1982. "Multistage analysis of marital status life tables: theory and application". Population Studies. Vol. 36.

المراجع العربية

٤- وجيه، مها محمد. ١٩٨٩. *نماذج وتباينات استمرارية ممارسة تنظيم الأسرة ــ حالة دراسية لمصر. رسالة مقدمة للحصول على درجة دكتوراه الفلسفة فى الإحصاء ــ كلية الاقتصاد والعلوم السياسية ــ جامعة القاهرة.*

٥- وجيه، مها محمد. ٢٠٠٣. *بناء جداول حياة حالية للتزايد والتناقص تصف تأثير مخاطر الخروج من الحالة محل الدراسة ــ فى حالة وجود ٢ من الحالات غير الماصة وحالة ماصة واحدة. المؤتمر السنوى الخامس عشر للإحصاء والنمذجة الآلية فى العلوم الاجتماعية والإنسانية. قسم الإحصاء ومركز نظم المعلومات والحاسبات الإلكترونية بكلية الاقتصاد والعلوم السياسية ــ جامعة القاهرة.*

٦- وجيه، مها محمد. ٢٠٠٤. *وصف سلوك الملتحقات بالحالات غير الماصة بجداول الحياة للتزايد والتناقص عندما تكون هناك علاقة بين خطر الخروج من الحالة غير الماصة بين سكانها وبين الملتحقات بها بكل فئة عمرية. المؤتمر السنوى السادس عشر للإحصاء والنمذجة الآلية فى العلوم الاجتماعية والإنسانية. قسم الإحصاء ومركز نظم المعلومات والحاسبات الإلكترونية بكلية الاقتصاد والعلوم السياسية ــ جامعة القاهرة.*